



## DLR IB 232-2015 J 04

Validierung von globalen  
Strukturdämpfungsmodellen  
für dynamische Analysen



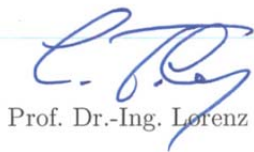


## Access Level II: restricted internal and restricted external access

### Dokumenteigenschaften

Titel	DLR IB 232-2015 J 04
Betreff	Validierung von globalen Strukturdämpfungsmodellen für dynamische Analysen
Institut	Institut für Aeroelastik Abteilung Strukturdynamik und aeroelastische Systemidentifikation
Kostenstelle	23218
Zusammengestellt von	M. Höser
Beitragende	Dr. M. Böswald, Dr. Y. Govers
Überprüft durch	Dr. M. Böswald
Veröffentlicht durch	Prof. Dr.-Ing. L. Tichy
Datum	31.03.2015
Version	1.1
Dateiname	DLR IB 232-2015 J 04.pdf
Kunde	

Institutsleiter:

  
Prof. Dr.-Ing. Lorenz Tichy

Autor:

  
Martin Höser, B.Sc.

Abteilungsleiter:

  
Dr.-Ing. Marc Böswald

Gruppenleiter:

  
Dr.-Ing. Yves Govers

**Duplication and distribution of this document as a whole or in excerpts as well as transmission of its content to third parties is allowed only with the permission of**  
(X) Client, (X) DLR





---

# Validierung von globalen Strukturdämpfungsmodellen für dynamische Analysen

## Zusammenfassung:

Für vorhersagekräftigere Finite-Elemente-Modelle großer, komplexer Strukturen müssen innere Dämpfungseffekte durch eine angemessene Dämpfungsmodellierung berücksichtigt werden. In dieser Arbeit wird untersucht, wie gut die Dämpfungseigenschaften einer Gesamtstruktur beschrieben werden, wenn Substrukturen, versehen mit globalen, proportionalen Dämpfungsmodellen, gekoppelt werden, sodass eine globale nicht-proportionale Gesamtsystem-Dämpfungsmatrix erzeugt wird. Verschiedene gebräuchliche Proportionaldämpfungsmodelle werden dazu auf Basis experimentell ermittelter und abgeglicherer numerisch errechneter modaler Eigenschaften einer in Substrukturen zerlegbaren Laborstruktur betrachtet und vergleichend auf ihre Eignung überprüft. Eine computergestützte Modellanpassung der globalen Dämpfungsbeschreibung durch wenige Verlustfaktoren der Substrukturen wird an einem willkürlichen Anwendungsbeispiel auf Basis der Sensitivität komplexer Eigenwerte entwickelt und erprobt und mit den experimentell identifizierten Testdaten der verwendeten Laborstruktur auf ihre Funktionalität geprüft.

Dieser Bericht enthält:  
208 Seiten einschließlich  
83 Abbildungen  
21 Tabellen  
47 Quellen



**Masterarbeit**

# **Validierung von globalen Strukturdämpfungsmodellen für dynamische Analysen**

vorgelegt am Fachgebiet  
Flugmechanik, Flugregelung und Aeroelastizität  
der Technischen Universität Berlin

von

**Martin Höser, B.Sc.**

Matr.-Nr.: 315209

Betreuer:

Prof. Dr.-Ing. Robert Luckner  
Prof. Dr.-Ing. Wolf-Reiner Krüger  
Dr.-Ing. Marc Böswald

Berlin, 13. März 2015



# Eidesstattliche Erklärung

Nach § 8 Abs. (2) der Ordnung zur Regelung des allgemeinen Prüfungsverfahrens in Bachelor- und Masterstudiengängen (AllgPO) erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Berlin, den

\_\_\_\_\_

Datum

\_\_\_\_\_

Unterschrift



## Masterarbeit

für

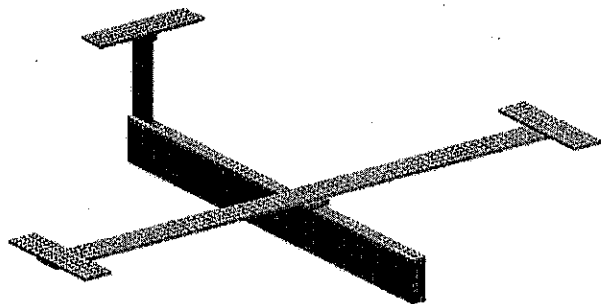
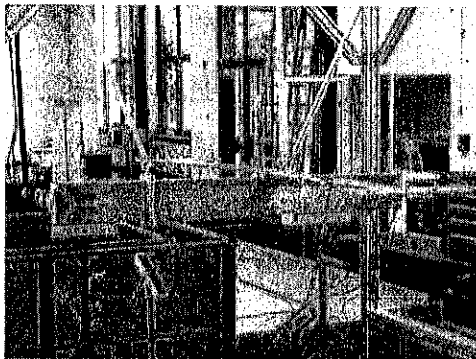
Herrn Martin Höser, B.Sc.

Matr.-Nr.: 315209

### Validierung von globalen Strukturdämpfungsmodellen für dynamische Analysen

Die stetig steigende Leistungsfähigkeit von Computersystemen bietet die Möglichkeit für immer detailliertere Simulationen. Entsprechend erhöht sich der Detaillierungsgrad numerischer Simulationsmodelle stetig. Aber trotz steigender Komplexität von Finite-Elemente (FE) Modellen werden die Dämpfungseigenschaften der modellierten Strukturen in den FE-Modellen in der Regel vernachlässigt.

Experimentell ermittelte Dämpfungswerte sind häufig in der Form von modalen Dämpfungsmaßen oder Strukturdämpfungskoeffizienten verfügbar. Diese experimentellen Dämpfungswerte sind jedoch nur eine grobe, globale Beschreibung des tatsächlichen Dämpfungsverhaltens. Sie enthalten keine weitere Information über die tatsächlichen Stellen in einer Struktur, an denen Dämpfungseffekte signifikant wirksam sind und an denen Energiedissipation auftritt.



Inspiziert durch Airbus Defence and Space in Bremen möchte das DLR Institut für Aeroelastik in Göttingen im Rahmen einer Masterarbeit verschiedene Ansätze zur Modellierung von Dämpfung in großen Luft- und Raumfahrtstrukturen untersuchen. Dabei stehen die Dämpfungsmaße großer zusammengesetzter Strukturen im Fokus der Untersuchung, die aus experimentell ermittelten Dämpfungsmaßen der Einzelkomponenten bzw. Substrukturen bestimmt werden müssen. Für die Untersuchungen wird die dargestellte Laborstruktur herangezogen. Die Struktur kann in geeigneter Weise in Substrukturen zerlegt werden, für die dann experimentelle Dämpfungsmaße im Rahmen von Modaltests beschafft werden. Das Dämpfungsverhalten der Gesamtstruktur soll ebenfalls experimentell in einem Modaltest ermittelt werden.

Verschiedene Dämpfungsmodelle sollen auf ihre Eignung zur Beschreibung der Dämpfung der zusammengesetzten Struktur hin überprüft werden. Insbesondere das Verfahren der Äquivalenten Strukturdämpfung (engl. *Equivalent Structural Damping*, ESD) in [1] ist zu untersuchen. Ein weiteres Verfahren ist in [2] beschrieben. Dabei wird eine globale nichtproportionale Dämpfungsmatrix aufgebaut aus den proportionalen Dämpfungsmatrizen einzelner Substrukturen und geeigneten lokalen Dämpferelementen an Verbindungsstellen.

Im Detail sind folgende Aufgabenpunkte zu bearbeiten:

1. Einarbeitung in die Themen:
  1. Strukturdynamik, insbesondere Dämpfungsmodellierung [3], [4]
  2. Finite-Elemente-Methode [4], [5]
  3. Experimentelle Modalanalyse und Signaltechnik [6].
2. Einarbeitung in die Software MSC.NASTRAN® und Patran®
3. Durchführung einer Konvergenzstudie des bereitgestellten FE-Modells der Laborstruktur durch Untersuchung der Veränderung der Eigenfrequenzen bei Netzverfeinerung
4. Modellierung der Substrukturen in geplanter experimenteller Testumgebung, Durchführung von Eigenwertanalysen in Vorbereitung auf 4.
5. Durchführung einer experimentellen Modalanalyse durch Phasentrennung (Hammertest) an der Laborstruktur und zwei Substrukturen gemäß [7], ggf. Erzeugung eines zweiten Datensatz durch Veränderung der Dämpfungsmaße einer einzelnen Substruktur durch Anbringen einer dämpfungserzeugenden Schicht
  1. Aufstellung eines Testplans
  2. Aufbau und Durchführung der Modaltests mittels bereitgestellter Messtechnik
  3. Analyse der Messdaten und Errechnung der jeweiligen modalen Eigenschaften
6. Anpassung der FE-Modelle an Testumgebung und an ermittelten Eigenfrequenzen
7. Auswahl geeigneter Dämpfungsmodellierung für Substrukturen, Vergleich des aus dämpfungsbehafteten Substrukturen zusammengeführten FE-Modells mit experimentell ermittelten Werten
8. Anwendung der Ansätze zum ESD nach [1] und [2] zur Synthese globaler Dämpfungsmatrizen, Vergleich der Methoden untereinander sowie mit experimentell ermittelten Daten, Bewertung der Methoden
9. Bewertung der angewandten Ansätze im Hinblick auf automatische FE-Modellanpassung (engl. *Computational Model Updating*, CMU)
10. Diskussion der Ergebnisse und Dokumentation aller Arbeitsschritte.


## Literatur

- [1] Albus, Beuchel, Dieker: A consistent approach of damping treatment in coupled dynamic analysis and test; 62nd International Astronautical Congress, Kapstadt, 2012
- [2] Rittweger, Beuchel, Abdoly, Albus: Coupled dynamic load analysis with different component damping of the substructures, 59th International Astronautical Congress, Glasgow, Scotland, 2008
- [3] Clough, Penzien: Dynamics of Structures, Second Edition, McGraw Hill, 1993
- [4] Gasch, Knothe, Liebich: Strukturdynamik. Bd. 2. Berlin : Springer Verlag, 2012
- [5] Bathe: Finite Element Procedures. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1996
- [6] Irretier: Experimentelle Modalanalyse. Bd. 1. Universität Gesamthochschule Kassel, 2000
- [7] Govers: Parameter Identification of Structural Dynamic Models by Inverse Statistical Analysis. Göttingen, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V., Forschungsbericht, 2012

Die Arbeit ist unter Berücksichtigung der „Richtlinien für die Anfertigung von Studien und Diplomarbeiten“ des Fachgebiets Flugmechanik, Flugregelung und Aeroelastik anzufertigen.

**Betreuer:** Prof. Dr.-Ing. Robert Luckner  
Prof. Dr.-Ing. Wolf-Reiner Krüger  
Dr.-Ing. Marc Böswald

**Bearbeitungszeit:** 4 Monate

  
(Prof. Dr.-Ing. Robert Luckner)



# Übersicht

Für vorhersagekräftigere Finite-Elemente-Modelle großer, komplexer Strukturen müssen innere Dämpfungseffekte durch eine angemessene Dämpfungsmodellierung berücksichtigt werden. In dieser Arbeit wird untersucht, wie gut die Dämpfungseigenschaften einer Gesamtstruktur beschrieben werden, wenn Substrukturen mit globalen, proportionalen Dämpfungsmodellen versehen und gekoppelt werden, sodass eine globale nichtproportionale Gesamtsystem-Dämpfungsmatrix erzeugt wird.

Verschiedene gebräuchliche Proportionaldämpfungsmodelle werden dazu auf Basis experimentell ermittelter und abgeglicherer numerisch errechneter modalen Eigenschaften einer in Substrukturen zerlegbaren Laborstruktur betrachtet und vergleichend auf ihre Eignung überprüft. Eine computergestützte Modellanpassung der globalen Dämpfungsbeschreibung durch wenige Verlustfaktoren der Substrukturen wird an einem willkürlichen Anwendungsbeispiel auf Basis der Sensitivität komplexer Eigenwerte entwickelt und erprobt und mit den experimentell identifizierten Testdaten der verwendeten Laborstruktur auf ihre Funktionalität geprüft.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>vii</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>xi</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Problemstellung und Ziel der Arbeit . . . . .	1
1.2. Vorgehensweise . . . . .	3
<b>2. Theorie zur Strukturodynamik von Mehr-Freiheitsgrad-Systemen</b>	<b>7</b>
2.1. Grundlegende Annahmen . . . . .	7
2.2. Diskrete Modellierung von Mehrfreiheitsgradsystemen . . . . .	11
2.2.1. Anwendung der Finite-Elemente-Methode . . . . .	11
2.2.2. Formulierung isoparametrischer Elemente . . . . .	13
2.3. Berücksichtigung von Dämpfung . . . . .	16
2.3.1. Proportionale viskose Dämpfung . . . . .	18
2.3.2. Proportionale strukturelle Dämpfung . . . . .	21
2.3.3. Proportionale modale Dämpfung . . . . .	22
2.3.4. Nichtproportionale Dämpfung . . . . .	25
2.4. Lösung des quadratischen Eigenwertproblems bei verschiedenen Dämpfungsmodellierungen . . . . .	25
2.4.1. Direkte Lösung und modale Entkopplung . . . . .	26
2.4.2. Modale Lösung . . . . .	31
<b>3. Theorie zur Experimentellen Modalanalyse</b>	<b>35</b>
3.1. Grundlagen . . . . .	35
3.2. Signalverarbeitung beim Phasentrennungsverfahren . . . . .	38
3.2.1. Instrumentierung und Signalerzeugung . . . . .	39
3.2.2. Verarbeitung der Messsignale . . . . .	41
3.2.3. Fehler bei der Aufnahme und Verarbeitung von Signalen . . . . .	44
3.2.4. Kohärenz der Messsignale . . . . .	48
3.3. Identifikation modaler Parameter mittels des PolyMAX-Verfahrens . . . . .	49
3.3.1. PolyMAX . . . . .	49
3.3.2. Qualitätsindikatoren und Korrelationskriterien . . . . .	52
<b>4. Theorie zur Parameteranpassung</b>	<b>55</b>
4.1. Sensitivitätsmethode . . . . .	56
4.2. Sensitivität komplexer Eigenwerte . . . . .	57

<b>5. Anwendungsbeispiel: Rechteckplatte</b>	<b>59</b>
5.1. Eigenschaften und Finite-Elemente-Modellierung . . . . .	59
5.2. Kopplung proportional gedämpfter Substrukturen . . . . .	61
5.3. Computergestützte Modelladaptation . . . . .	64
5.3.1. Untersuchung der Sensitivität . . . . .	64
5.3.2. Automatische Anpassung komplexer Eigenwerte . . . . .	68
5.4. Bewertung des Verfahrens und der Ergebnisse . . . . .	74
<b>6. Anwendungsbeispiel: Laborstruktur AIRMOD</b>	<b>75</b>
6.1. Eigenschaften der Laborstruktur . . . . .	75
6.2. Finite-Elemente-Modellierung . . . . .	77
6.2.1. Elementierung . . . . .	77
6.2.2. Konvergenzstudie . . . . .	80
6.2.3. Neuaufbau des FE-Modells . . . . .	87
6.3. Experimentelle Modalanalyse . . . . .	90
6.3.1. Vorbereitung . . . . .	90
6.3.2. Durchführung . . . . .	101
6.3.3. Ergebnisse . . . . .	106
6.4. Korrelation von experimenteller und numerischer Modalanalyse . . . . .	114
6.4.1. Manuelle Anpassung der FE-Modelle an die Testumgebung . . . . .	115
6.4.2. Korrelation . . . . .	117
6.4.3. Bewertung . . . . .	123
6.5. Dämpfungsmodellierung . . . . .	124
6.5.1. Berechnung der Dämpfungsmatrizen und Substrukturkopplung . . . . .	124
6.5.2. Ergebnisse . . . . .	128
6.5.3. Bewertung . . . . .	135
6.6. Computergestützte Modelladaptation . . . . .	137
6.6.1. Untersuchung der Sensitivität . . . . .	137
6.6.2. Automatische Anpassung globaler modaler Dämpfungsmaße . . . . .	139
6.6.3. Bewertung der Erprobung . . . . .	145
<b>7. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>147</b>
7.1. Zusammenfassung . . . . .	147
7.2. Ausblick . . . . .	148
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>151</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>155</b>
A.1. Rücktransformation der generalisierten viskosen Dämpfungsmatrix in eine physikalische Matrix . . . . .	155
A.2. Computergestützte Modelladaptation der globalen modalen Dämpfungsmaße einer Platte . . . . .	156
A.3. Eigenformen des anfänglichen FE-Modells der Laborstruktur . . . . .	158
A.4. Sensorplan . . . . .	160
A.5. Erregerpunkte . . . . .	161
A.6. Bilder der Tests und weitere Ergebnisse . . . . .	162
A.7. Weitere Ergebnisse der experimentellen Modalanalyse . . . . .	164

---

A.8. Identifizierte Eigenformen der experimentellen Modalanalyse – Gesamtstruktur	168
A.9. Identifizierte Eigenformen aus EMA der Rumpf-Leitwerk-Substruktur . . . . .	171
A.10. Identifizierte Eigenformen aus EMA der Flügel-Substruktur . . . . .	172
A.11. Relevante Eigenformen des manuell angepassten FE-Modells der Laborstruktur	174
A.12. Relevante Eigenformen des manuell angepassten FE-Modells der unbehandelten Substrukturen . . . . .	176
A.13. Weitere Ergebnisse der Korrelation . . . . .	178
A.14. Ergebnisse der Dämpfungskopplung bei der dämpfungsbehandelten Laborstruktur AIRMOD . . . . .	180
A.15. Weitere Ergebnisse der computergestützten Modellanpassung . . . . .	183



# Abbildungsverzeichnis

1.1. Flussdiagramm zur Durchführung der Abschlussarbeit . . . . .	5
2.1. Einseitig eingespannter Balken [eigene Darstellung] . . . . .	8
2.2. Fachwerksstab mit zwei Knoten an beiden Enden [eigene Darstellung] . . . . .	14
2.3. Verwendung von Ansatzfunktionen zur Annäherung des Verschiebungsfeldes eines Fachwerkstabes (angepasst aus [27]) . . . . .	15
2.4. Ein-Freiheitsgrad-System [eigene Darstellung] . . . . .	17
2.5. Viskose Proportionaldämpfung (übernommen aus [16]) . . . . .	19
2.6. Verlauf des generalisierten Dämpfungsgrades über die Kreisfrequenz bei ver- schiedenen Proportionaldämpfungsmodellen . . . . .	20
3.1. Allgemeiner Testaufbau beim Frequenzbereichsverfahren [3] . . . . .	38
3.2. Erregerkraftspektrum bei unterschiedlichen Rechteckimpulsdauern . . . . .	40
3.3. Spektrum einer abgetasteten, nichtperiodischen Funktion $y_A(t)$ bei $f_{max} > f_A/2$ (links) und bei $f_{max} < f_A/2$ (rechts) . . . . .	47
3.4. Stabilisierungsdiagramm (Beispielbild) [34] . . . . .	50
5.1. Skizze mit Abmaßen und FE-Modell der Platte . . . . .	60
5.2. Lösungsfehler . . . . .	61
5.3. Abstrahierte Darstellung zur Kopplung der Substrukturmatrizen . . . . .	63
5.4. Lösung des Eigenwertproblems der Platte und Sensitivitätsmatrix bei RAY- LEIGH-Dämpfung (oben) und bei struktureller Dämpfung (unten) mit Verlust- faktoren aus <u>Tab. 5.2</u> . . . . .	66
5.5. Flussdiagramm zur Umsetzung der computergestützten automatischen Model- lanpassung . . . . .	69
5.6. Computergestützte Modelladaptation komplexer Eigenwerte der Platte bei RAY- LEIGH-Dämpfung, konsistenter Fall . . . . .	71
5.7. Computergestützte Modelladaptation komplexer Eigenwerte der Platte bei RAY- LEIGH-Dämpfung, inkonsistenter Fall . . . . .	73
6.1. Darstellung der Teststruktur AIRMOD . . . . .	76
6.2. Anfängliche Modellierung der Teststruktur AIRMOD in der FE-Software Patran™ . . . . .	78
6.3. Darstellung der reduzierten Struktur als Ersatz für AIRMOD-Flügel . . . . .	81
6.4. Elementierung der reduzierten Struktur mit Plattenelementen des Typs CQUAD4 . . . . .	82
6.5. Konvergenzverlauf und konvergierte Eigenfrequenzen des CQUAD4-Flügelmodells . . . . .	83
6.6. Elementierung der reduzierten Struktur mit Volumenelementen des Typs CHE- XA 1. Ordnung . . . . .	84
6.7. Konvergenz der Eigenfrequenzen der reduzierten Struktur bei Verwendung von CHEXA-Elementen 1. Ordnung . . . . .	84

6.8. Lösungsfehler bei Verwendung von CHEXA-Elementen 1. Ordnung . . . . .	85
6.9. Konvergenz der Eigenfrequenzen der reduzierten Struktur bei Verwendung von CHEXA-Elementen 2. Ordnung . . . . .	87
6.10. Lösungsfehler bei Verwendung von CHEXA-Elementen 2. Ordnung . . . . .	87
6.11. FE-Modelle der Laborstruktur: gesamt und Substrukturen . . . . .	89
6.12. Amplitudenspektrum verschiedener Schlagspitzen [26] . . . . .	92
6.13. Ehemalige Belegung der Sensoren, die in eigenen Bohrungen installiert werden können (blau - x-Richtung, grün - y-Richtung, orange - z-Richtung) . . . . .	95
6.14. Biegeeigenformen eines eingespannten Kragbalkens der Länge $l = 0.955\text{m}$ so- wie bestehende und zusätzlich ausgewählte Sensorplatzierung . . . . .	96
6.15. Ergänzte Belegung der Sensoren (blau - x-Richtung, grün - y-Richtung, orange - z-Richtung; zusätzliche Sensoren in dunklerer Farbe) . . . . .	97
6.16. Auto-MAC-Matrizen der elastischen Eigenformen von AIRMOD und seinen Substrukturen, links mit alter Sensorbelegung, rechts mit zusätzlichen Sensoren .	98
6.17. Erregerpunkte (blau - x-Richtung, grün - y-Richtung, orange - z-Richtung) . .	99
6.18. Aufbau für T1C0, mit item-Gestell und doppelt geführten Bungee-Seilen (hier auf Ständern gelagert) . . . . .	100
6.19. Amplitudengang zwischen 3 und 20 Hz (Erregerpunkt H01, Sensorposition 030202) bei einfach (oben) und doppelt (unten) geführten Bungee-Seilen . . .	101
6.20. Kabelabführungen . . . . .	102
6.21. Adapter aus Aluminium zur Verschraubung der Substrukturen auf Fundament .	103
6.22. Amplituden- und Phasengang von 0 bis $f_{max}$ (Erregerpunkt H11, Sensorposi- tion 040202) bei eingespanntem Flügel ohne und mit Behandlung durch FLD .	105
6.23. Frequenzgänge der eingespannten, unbeschichteten Flügelstruktur aus Test T5C1 (Erregerpunkt H11) sowie identifizierte symmetrische Flügelbiegung . . .	106
6.24. AutoMAC-Matrizen: Gesamtstruktur (T1C0) und Substrukturen (T4C2 und T5C1) . . . . .	110
6.25. MAC-Matrizen der Tests zwischen unbeschichteter und beschichteter Gesamt- struktur bzw. Flügel-Substruktur . . . . .	113
6.26. Verlauf von Real- und Imaginärteil (Erregerpunkt H21) frei hängenden Rumpf- Leitwerk-Struktur . . . . .	114
6.27. Modellierung der kinematischen Abhängigkeit der Zusatzmasse in MSC.NASTRAN (grün - Volumenelemente, orange - RBE3-Elemente, magenta - RBAR-Element) .	115
6.28. Systemmodellierung zur Bestimmung der Bungee-Federraten . . . . .	116
6.29. Modellierung der Dämpfungsbeschichtung mit konzentrierten Massenelemen- ten (grün - Volumenelemente, magenta - RBAR-Elemente, orange - Massen- elemente) . . . . .	117
6.30. Beispiele für die Verwendung von <i>Spike</i> und <i>Polar Plots</i> . . . . .	119
6.31. MAC-Matrix, ausgewählte Eigenformpaare und Frequenzabweichung bei frei- frei aufgehängter Gesamtstruktur T1C0 . . . . .	120
6.32. MAC-Matrix zwischen experimentell und numerisch bestimmten Eigenformen, ausgewählte Eigenformpaare und Frequenzabweichung . . . . .	121
6.33. Abschätzung der Verlustfaktoren $g$ für die eingespannte Rumpf-Leitwerk-Struktur (T4C2), den eingespannten Flügel (T5C1) und den eingespannten dämpfungs- behandelten Flügel (T6C1) . . . . .	125
6.34. Kopplung der Systemmatrizen . . . . .	126



6.35. Ergebnisse der Kopplung der proportionalen gedämpften Substrukturen mit abgeschätzten Verlustfaktoren $g$ . . . . .	130
6.36. Ergebnisse der Kopplung der proportionalen gedämpften Substrukturen mit abgeschätzten Verlustfaktoren $g$ . . . . .	131
6.37. Unterschied zwischen den berechneten globalen modalen Dämpfungsmaßen der modalen Dämpfungsmodellierungen . . . . .	134
6.38. Komplexe Sensitivitätsmatrizen für die Laborstruktur . . . . .	138
6.39. Abgeändertes Flussdiagramm zur Umsetzung der computergestützten automatischen Modellanpassung bei der Laborstruktur . . . . .	140
6.40. Ergebnisse der computergestützten Modellanpassung bei RAYLEIGH-Dämpfung, unbehandelte Laborstruktur . . . . .	142
6.41. Ergebnisse der computergestützten Modellanpassung bei steifigkeitsproportionaler struktureller Dämpfung, unbehandelte Laborstruktur . . . . .	143
A.1. Computergestützte Modellanpassung komplexer Eigenwerte der Platte bei steifigkeitsproportionaler struktureller Dämpfung, konsistenter Fall . . . . .	156
A.2. Computergestützte Modellanpassung komplexer Eigenwerte der Platte bei steifigkeitsproportionaler struktureller Dämpfung, inkonsistenter Fall . . . . .	157
A.3. Elastische Eigenformen des anfänglich zur Verfügung gestellten FE-Modells, mit Eigenfrequenzen $f_0$ zwischen 5 und 130 Hz . . . . .	158
A.4. Elastische Eigenformen des anfänglich zur Verfügung gestellten FE-Modells, mit Eigenfrequenzen $f_0$ zwischen 130 und 400 Hz . . . . .	159
A.5. Bilder der Testaufbauten 1 bis 4 . . . . .	162
A.6. Bilder der Testaufbauten 5 bis 8 . . . . .	163
A.7. Identifizierte Eigenformen aus T1C0, Eigenfrequenzen zwischen 0,42 und 55 Hz	168
A.8. Identifizierte Eigenformen aus T1C0, Eigenfrequenzen zwischen 55 und 319 Hz	169
A.9. Identifizierte Eigenformen aus T1C0, Eigenfrequenzen zwischen 319 und 400 Hz	170
A.10. Identifizierte Eigenformen aus T4C2 . . . . .	171
A.11. Identifizierte Eigenformen aus T5C1, Eigenfrequenzen zwischen 0,5 und 300 Hz	172
A.12. Identifizierte Eigenformen aus T5C1, Eigenfrequenzen zwischen 300 und 400 Hz	173
A.13. Eigenformen des manuell angepassten FE-Modells, Eigenfrequenzen zwischen 0 und 110 Hz . . . . .	174
A.14. Eigenformen des manuell angepassten FE-Modells, Eigenfrequenzen zwischen 110 und 400 Hz . . . . .	175
A.15. Eigenformen des manuell angepassten FE-Modells der Flügel-Substruktur, Eigenfrequenzen zwischen 0 und 320 Hz . . . . .	176
A.16. Eigenformen des angepassten FE-Modells, Eigenfrequenzen 320 bis 400 Hz . .	177
A.17. Eigenformen des angepassten FE-Modells der Rumpf-Leitwerk-Substruktur . .	177
A.18. MAC-Matrix, ausgewählte Eigenformpaare und Frequenzabweichung bei eingespannter, dämpfungsbeschichteter Flügel-Substruktur T6C1 . . . . .	178
A.19. MAC-Matrix, ausgewählte Eigenformpaare und Frequenzabweichung bei eingespannter, dämpfungsbeschichteter Gesamtstruktur T8C0 . . . . .	179
A.20. Unterschied zwischen berechneten globalen modalen Dämpfungsmaßen der modalen Dämpfungsmodellierungen bei der beschichteten Gesamtstruktur . . . .	180
A.21. Ergebnisse der Kopplung der proportionalen gedämpften Substrukturen mit abgeschätzten Verlustfaktoren $g$ . . . . .	181

A.22. Ergebnisse der Kopplung der proportionalen gedämpften Substrukturen mit abgeschätzten Verlustfaktoren $g$ . . . . .	182
A.23. Ergebnisse der computergestützten Modellanpassung bei RAYLEIGH-Dämpfung, dämpfungsbeschichtete Laborstruktur . . . . .	183
A.24. Ergebnisse der computergestützten Modellanpassung bei steifigkeitsproportionaler struktureller Dämpfung, dämpfungsbeschichtete Laborstruktur . . . . .	184

# Tabellenverzeichnis

5.1. Verwendete Materialkennwerte von Aluminium . . . . .	59
5.2. Verlustfaktoren $g$ des Beispiels . . . . .	65
6.1. Abmessungen der Einzelkomponenten der Laborstruktur AIRMOD . . . . .	77
6.2. Elementseitenlängen und -schichtanzahl bei Netzverfeinerung des Modells der Flügelstruktur . . . . .	81
6.3. Testmatrix der experimentellen Modalanalyse an der Laborstruktur AIRMOD .	91
6.4. Einstellungen zur Signalaufnahme und -verarbeitung in LMS Test.Lab 13A <i>Impact Testing</i> . . . . .	93
6.5. Zeitkonstanten bei Eigenfrequenzen gemäß [17] und konservativ geschätzten generalisierten Dämpfungsmaßen . . . . .	94
6.6. Anziehdrehmomente der Schraubverbindungen bei den einzelnen Tests . . . .	104
6.7. Schlüssel zur Bezeichnung der elastischen Eigenformen . . . . .	107
6.8. Modale Eigenschaften T1C0 . . . . .	108
6.9. Modale Eigenschaften T4C2 . . . . .	109
6.10. Modale Eigenschaften T5C1 . . . . .	109
6.11. Proportionale Verlustfaktoren $g$ der dämpfungsunbehandelten Komponenten .	128
A.1. Sensorplan . . . . .	160
A.2. Erregerpunkte . . . . .	161
A.3. Modale Eigenschaften T2C1 . . . . .	164
A.4. Modale Eigenschaften T3C2 . . . . .	165
A.5. Modale Eigenschaften T6C1 . . . . .	165
A.6. Modale Eigenschaften T7C1 . . . . .	166
A.7. Modale Eigenschaften T8C0 . . . . .	167
A.8. Verlustfaktoren $g$ der dämpfungsbehandelten Komponenten . . . . .	180



# Liste der verwendeten Symbole und Abkürzungen

## Mathematische Symbole

Symbol	Erklärung
$[\bullet]$	Matrix
$\{\bullet\}$	Spaltenvektor
$\langle \bullet \rangle$	Reihenvektor
$ \bullet $	Betrag eines Skalars, Vektors oder Matrix
$\ \bullet\ _2$	Spektralnorm einer Matrix
$\bullet^\top$	Transponierte eines Vektors oder Matrix
$[\bullet]^{-1}$	Invertierte Matrix
$[\bullet]^+ = ([\bullet]^\top [\bullet])^{-1} [\bullet]^\top$	Pseudo-Invertierte einer Matrix
$\bullet^*$	komplex Konjugierte eines Skalars, Vektors oder Matrix
$\Re(\bullet)$	Realteil eines komplexen Skalars, Vektors oder Matrix
$\Im(\bullet)$	Imaginärteil eines komplexen Skalars, Vektors oder Matrix
$\mathcal{F}(\bullet)$	FOURIER-Transformierte
$i$	imaginäre Zahl $\sqrt{-1}$
$(\bullet)' = \frac{\partial(\bullet)}{\partial x}$	partielle Ableitung nach dem Ort (x-Richtung)
$(\dot{\bullet}) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t}$	partielle Ableitung nach der Zeit

## Physikalischer Raum, Zeitbereich

Symbol	Einheit	Erklärung
$E, E', E''$	$\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Elastizitätsmodul, Speichermodul, Verlustmodul
$I$	$\text{m}^4$	Flächenträgheitsmoment
$N(\xi)$	-	Ansatz-/Formfunktion
$T_M$	s	Messzeitraum
$d$	$\frac{\text{Ns}}{\text{m}}$	Dämpfungskonstante
$f(t)$	N	Kraftsignal
$k$	$\frac{\text{N}}{\text{m}}$	Federkonstante
$l$	m	Länge
$m$	kg	Masse

$p$		Polynomgrad, beliebiger Parameter
$q(t)$		Zeitfunktion
$\Delta t$	s	Zeitschrittweite
$u(t)$	m/s <sup>2</sup>	Antwortsignal, in der Regel Beschleunigung
$w$	m	Verschiebungszustand eines infinitesimal kleinen Balkenelements in z-Richtung
$x, y, z$	m	physikalische Koordinate
$y(t)/y(t_k)$	-	beliebige kontinuierliche oder diskrete Funktion
$\delta(t)$	-	DIRAC-Funktion
$\epsilon$	-	Dehnung
$\mu$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}}$	Massenverteilung eines Elementes
$\xi$	-	natürliche Koordinate
$\rho$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Dichte
$\sigma$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Spannung
$\phi(x)$	m	Eigen(schwingungs)form
$\varphi$	rad, °	Phase

## Physikalischer Raum, Frequenzbereich

Symbol	Einheit	Erklärung
$F(\Omega)$	Ns	Erregerkraftspektrum
$H(\Omega)$	$\frac{\text{m/s}^2}{\text{N}}$	Frequenzgang
$R$	$\frac{\text{m/s}^2 \cdot \text{rad/s}}{\text{N}}$	Residuum
$S(\Omega)$	$\frac{\text{m/s}^2}{\text{N}}$	Spektrale Leistungsdichte
$T$	s	Zeitperiode
$U(\Omega)$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	Antwortspektrum
$Y(\Omega)$	-	FOURIER-Spektrum einer beliebigen Funktion $y(t)$
$\Delta f$	Hz	Frequenzauflösung
$f$	Hz	Frequenz
$f_A$	Hz	Abtastfrequenz
$s$	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$	LAPLACE-Variable
$\Omega$	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$	(Erreger)Kreisfrequenz
$\Omega_A$	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$	Abtastkreisfrequenz
$\gamma$	-	Kohärenz
$\tau$	s	Zeitkonstante

## Strukturraum, Zustandsraum

Symbol	Erklärung
$[0]$	Nullmatrix
$[A], [B]$	Systemmatrizen

$[C]$	Imaginärteil der komplexen Steifigkeitsmatrix $[K^c] \in \mathbb{C}$
$[D]$	Viskose Dämpfungsmatrix
$[I]$	Identitätsmatrix
$[K]$	Steifigkeitsmatrix $\in \mathbb{R}$
$[K^c]$	Steifigkeitsmatrix $\in \mathbb{C}$
$[M]$	Massenmatrix
$g$	proportionaler Verlustfaktor
$g_{m,v}$	massenproportionaler viskoser Verlustfaktor
$g_{s,s}$	steifigkeitsproportionaler struktureller Verlustfaktor
$g_{s,v}$	steifigkeitsproportionaler viskoser Verlustfaktor
$\{u\}$	Vektor mit Verschiebungsfreiheitsgraden

## Modalraum

Symbol	Einheit	Erklärung
$D$	-	Dämpfungsgrad, LEHR'sche Dämpfung
$D_{gen}$	-	modaler/generalisierter Dämpfungsgrad
$a_{gen}$	$\frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot \text{kgm}^2$	modales $a$
$b_{gen}$	$(\frac{\text{rad}}{\text{s}})^2 \text{kgm}^2$	modales $b$
$c_{gen}$	Nm	Imaginärteil der generalisierten komplexen Steifigkeit $k_{gen}^c$
$d_{gen}$	Ns · m	modale/generalisierte Dämpfung
$f$	Hz	Eigenfrequenz
$k_{gen}$	Nm	modale/generalisierte Steifigkeit
$k_{gen}^c$	Nm	modale/generalisierte komplexe Steifigkeit
$m_{gen}$	kgm	modale/generalisierte Masse
$q$	-	modaler Freiheitsgrad/generalisierte Koordinate
$\{\hat{q}\}$	-	generalisierter Eigenvektor
$[\Phi]$	m	Modalmatrix $\in \mathbb{R}$
$[\Psi]$	m	Modalmatrix $\in \mathbb{C}$
$\delta$	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$	Abklingkonstante, $-\Re(\lambda)$
$\delta_X$	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$	Abklingkonstante eines Exponentialfensters
$\lambda$	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$	Eigenwert
$\{\phi\}$	m	Eigenvektor $\in \mathbb{R}$
$\{\psi\}$	m	Eigenvektor $\in \mathbb{C}$
$\omega$	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$	Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems, $\Im(\lambda)$
$\omega_0$	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$	Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems

## Stochastik

Symbol	Einheit	Erklärung
$[G_\lambda], [G_D]$		Sensitivitätsmatrix bezüglich $\lambda$ , $D$
$[W_\varepsilon]$		Wichtungsmatrix

$Z$		Zielfunktional
$\{\varepsilon\}$	-	Vektor mit Residuen bzw. Abweichungen
$\varepsilon_K$	-	Konvergenzfehler
$\varepsilon_S$	-	Lösungsfehler
$\kappa$	-	Konditionszahl

## Indizes

Index	Erklärung
$(\bullet)$	Amplitude
$(\bullet)_{Elm}$	ein finites Element betrachtend
$(\bullet)_Z$	Ziel-
$(\bullet)_{gen}$	generalisiert, modal
$(\bullet)_j, (\bullet)_k$	auf das j-te oder k-te Element bezogen
$(\bullet)_{max}$	maximal
$(\bullet)_n$	alle $n$ Elemente betreffend
$(\bullet)_{norm}$	normiert
$(\bullet)_{red}$	reduziert
$(\bullet)_{upd}$	computergestützt angepasst

## Abkürzungen

Abkürzung	Erklärung
Abb.	Abbildung
CLD	<i>Constrained-Layer Damping</i> (dt.: Eingespannte Dämpfungsschicht)
CMS	Component Mode Synthesis (dt.: Synthese der Komponenteneigenformen)
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V.
EMA	Experimentelle Modalanalyse
ESD	<i>Equivalent Structural Damping</i> (dt.: Äquivalente Strukturelle Dämpfung)
FE	Finite-Elemente
FEA	Finite-Elemente-Analyse
FEM	Finite-Elemente-Methode
FFT	<i>Fast-Fourier-Transformation</i> (dt.: Schnelle FOURIER-Transformation)
FHG	Freiheitsgrad
FLD	<i>Free-Layer Damping</i> (dt.: Freiliegende Dämpfungsschicht)
GARTEUR	<i>Group for Aeronautical Research and Technology in Europe</i>
Gl.	Gleichung
HTP	<i>Horizontal Tailplane</i> (dt.: Höhenleitwerk)



---

Kap.	Kapitel
LMS	Leuven Measurement Systems
MAC	<i>Modal Assurance Criterion</i> (dt.: Modales Gütekriterium)
MPC	<i>Modal Phase Collinearity</i> (dt.: Modale Phasenkollinearität)
MPD	<i>Modal Phase Deviation</i> (dt.: Modaler Phasenversatz)
NMA	Numerische Modalanalyse
ONERA	<i>Office national d'études et de recherches aérospatiales</i> (dt.: Nationales Luftfahrtforschungsbüro)
RBM	<i>Rigid Body Mode</i> (dt.: Starrkörpereigenform)
VTP	<i>Vertical Tailplane</i> (dt.: Seitenleitwerk)
Tab.	Tabelle
bspw.	beispielsweise
bzw.	beziehungsweise
dt.	deutsch
vgl.	vergleiche

---



# 1. Einleitung

## 1.1. Problemstellung und Ziel der Arbeit

Ähnlich wie im Bauwesen und im Maschinenbau sind die für die Luft- und Raumfahrt ausgelegten Strukturen komplexen dynamischen Kräften ausgesetzt und werden so selbst- oder zwangserregt zu Schwingungen angeregt. Beispielhaft für solche Strukturen in der Luftfahrt seien konventionelle Starr- und Drehflügler genannt, die durch die Einwirkung von Luftströmungen oder von Triebwerks- bzw. Hauptrotorsystemen schwingen. Für den Bereich der Raumfahrt seien Trägersysteme angeführt, bei deren Auslegung ähnlich zum Luftfahrzeugbau Schwingungen infolge der Belastung durch aerodynamische Strömungen und Triebwerksschub berücksichtigt werden müssen [15].

Diese Schwingungen können in großem Maße zu einer sinkenden Lebensdauer durch Ermüdung bis hin zum Versagen der Struktur beitragen. Für eine sichere Konstruktion und Bewertung dynamisch beanspruchter Bauteile und -gruppen ist die Kenntnis ihres Schwingungsverhaltens von großer Bedeutung und die Grundlage von weitergehenden Modellbildungen, die zusätzliche externe oder gar systemabhängige Kräfte mit einschließen.

Die Strukturdynamik widmet sich dieser mechanischen Problemstellung, indem sie sich mit den Schwingungsvorgängen kontinuierlicher Strukturen auseinandersetzt. Sie basiert dabei auf grundlegenden Modellvorstellungen der Kontinuumsmechanik und erlaubt eine mathematisch-mechanische Beschreibung der technischen Struktur als schwingungsfähiges System. Sie ermöglicht eine Berechnung von Strukturschwingungseigenschaften, vor allem mittels der Finite-Elemente-Methode (FEM) auf Basis einer idealisierten Steifigkeits- und Masseverteilung.

Im Gegensatz zum mathematisch-mechanischen Ansatz wird die experimentelle Modalanalyse als ein Werkzeug der experimentellen Systemidentifikation genutzt, um aus realen Schwingungsmessdaten modale Daten und daraus ein äquivalentes modales Modell der realen Struktur zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens zu gewinnen.

Immer komplexere und größere FE-Rechenmodelle mit einer feineren Masse- und Steifigkeitsverteilung zielen auf eine höhere Vorhersagequalität der Strukturantwort auf dynamische Lasten ab, vernachlässigen dabei aber vor allem bei Strukturen aus metallischen Werkstoffen oft die Dämpfungseigenschaften. Dämpfung, ein in jeder Struktur enthaltener innerer Energieverlust, ist allerdings besonders bei lang anhaltenden dynamischen Belastungen wichtig, wie bspw. Erdbeben und Wind im Bauwesen oder Starts von Trägerraketen in der Raumfahrt. Sie hat großen Einfluss auf die Resonanzantwort der Struktur, denn nur Dämpfung gleicht die von

außen kommenden Kräfte aus und begrenzt die Resonanzspitze. Sie ist der unsicherste Parameter in der Strukturodynamik und kann nur sehr schwer theoretisch vorhergesagt werden. Daher wird sie im Allgemeinen experimentell abgeschätzt und nachträglich in den Rechenmodellen abgebildet [10].

Besonders bei großen zusammengesetzten Strukturen in der Luft- und Raumfahrt ergeben sich allerdings Probleme mit der Dämpfungsmodellierung von komplexen Gesamtsystemen:

- Die Bestimmung der modalen Dämpfungsmaße des Gesamtsystems mittels einer EMA ist oft wegen der Größe des betrachteten Systems schlicht nicht möglich oder wirtschaftlich nicht verträglich. Lediglich die modalen Dämpfungsmaße der Substrukturen können experimentell bestimmt werden [31].
- Proportionale Dämpfungsmodelle, angewandt auf die Bewegungsdifferentialgleichungen der Gesamtstruktur, können Dämpfungseffekte im Groben berücksichtigen. Dieser Ansatz wird aber schnell zu ungenau und verliert seine Anwendungsberechtigung, sobald das Gesamtsystem aus verschiedenen Substrukturen und Materialien besteht [10].

Diesbezüglich untersucht diese Abschlussarbeit, wie gut die globalen Dämpfungseigenschaften einer Gesamtstruktur vorhergesagt werden, wenn Dämpfung in den Substrukturen individuell durch verschiedene Typen *globaler* Proportionaldämpfung modelliert wird und eine Synthese nichtproportionaler Gesamt-Systemdämpfungsmatrizen durch eine Kopplung der Substrukturen vorgenommen wird. Durch die korrekte Modellierung von globaler Dämpfung in den Substrukturen ohne einen übermäßigen Anstieg der Anzahl dämpfungsbeschreibender Parameter zielt sie auf diese Weise auf eine Verbesserung der Beschreibung der Dämpfungseigenschaften eines Gesamtsystems.

Die Untersuchung steht dabei im Gegensatz zu dem bspw. in [8] und [40] ausführlich untersuchten Ansatz, dass die Dämpfungseigenschaften eines Systems aus gekoppelten Substrukturen hauptsächlich durch die Art, Anordnung und Geometrie der Verbindungsstellen beeinflusst wird und vor allem eine *lokale* Modellierung von Dämpfungseigenschaften in den Verbindungsstellen präzise Vorhersagen der Gesamtsystem-Dämpfung liefert.

Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Proportionaldämpfungsmodelle sind RAYLEIGH-Dämpfung, steifigkeitsproportionale strukturelle Dämpfung, modale viskose Dämpfung und modale strukturelle Dämpfung. Die strukturellen Dämpfungsmodellierungen sind Teile des in [37] und [4] dargelegten Konzepts von *Equivalent Structural Damping* (engl. Äquivalente Strukturelle Dämpfung, ESD).

In diesem Zusammenhang untersucht sie zusätzlich, ob die Beschreibung der Dämpfungseigenschaften eines Gesamtsystems durch eine computergestützte Anpassung (engl.: *Computational Model Updating*, CMU) der dämpfungsbeschreibenden Parameter der Substruktur-Dämpfungsmodelle gezielt verbessert werden kann.

## 1.2. Vorgehensweise

Erste rein analytische und numerische Berechnungen werden in Kap. 5 an einer Rechteckplatte, welche definiert, mittels FEM modelliert und in zwei Substrukturen aufgeteilt wird, durchgeführt. Sie sollen zum Einen Aufschlüsse darüber geben, mit welcher Methodik und welchen Softwarewerkzeugen eine Zuweisung proportionaler Dämpfung an Substrukturen erreicht werden kann und was bei einer Kopplung von Substruktur-FE-Rechenmodellen beachtet werden muss. Zum Anderen sollen sie einen Einstieg in das Problem computergestützter Modellanpassung von Dämpfungseigenschaften ermöglichen, indem die Sensitivität komplexer Eigenwerte bezüglich einer Änderung der Verlustfaktoren bei geeigneten Dämpfungsmodellierungen untersucht und für eine Anpassung verwendet werden soll.

Als reales Anwendungsbeispiel wird für diese Arbeit die Laborstruktur namens *Aircraft Model* (dt.: Flugzeugmodell, Abk. AIRMOD), die leicht in zwei Substrukturen getrennt werden kann, in Kap. 6 untersucht. Sie steht einerseits als FE-Rechenmodell bereits zur Verfügung und soll andererseits gesamt und in Substrukturen zerlegt experimentell zur Validierung und zum Erhalt modaler Dämpfungsmaße untersucht werden.

Die Untersuchungsschritte für AIRMOD sind in Abb. 1.1 dargestellt.

Das vorab zur Verfügung gestellte FE-Modell wird in Kap. 6.2 auf Idealisierungs- und Diskretisierungsfehler untersucht. Es wird dazu zuerst auf seine Modellannahmen überprüft und dann einer Konvergenzstudie unterzogen, um Fehler dieser Art zu minimieren. Dieses Modell ist Grundlage für die FE-Modellierung der Laborstruktur und ihrer Substrukturen in der jeweiligen Testumgebung.

In Kap. 6.3 werden Modaltests an den Substrukturen sowie an der zusammengebauten Gesamtstruktur AIRMOD in verschiedenen Testumgebungen zur Identifikation ihrer jeweiligen modalen Eigenschaften vorbereitet und durchgeführt. Die Tests werden mithilfe der Erfahrungen und Ergebnisse aus [17] und mithilfe des vorläufigen FE-Modells geplant. Zusätzliche Tests für eine größere Datengrundlage werden durchgeführt, wobei eine Substruktur mit einer zusätzlichen dämpfenden Schicht versehen wird, um gezielt die Dämpfungseigenschaften der Substruktur und letztendlich der Gesamtstruktur zu verändern.

Anschließend folgt in Kap. 6.4 eine manuelle Anpassung der FE-Modelle an die jeweiligen Testumgebungen mithilfe der Testaufbauten und experimentellen Daten, um die Einflüsse der Testumgebung zu berücksichtigen. Mithilfe von Korrelationskriterien werden die errechneten modalen Eigenschaften der ungedämpften FE-Modelle mit den experimentell ermittelten modalen Eigenschaften mittels Korrelationskriterien verglichen. Der Vergleich ermöglicht die Bewertung der Vorhersagequalität der mathematischen Modelle.

Die finalen verglichenen FE-Modelle der Substrukturen sowie die experimentell ermittelten modalen Dämpfungsmaße der Substrukturen sind Grundlage für die Dämpfungsmodellierung in Kap. 6.5 und somit für die Berechnung der proportionalen Dämpfungsmatrizen. Die proportional gedämpften Substrukturen werden gekoppelt und resultieren in einer nichtproportionalen

Gesamt-Dämpfungsmatrix, mit der die modalen Eigenschaften des gekoppelten Gesamtsystems berechnet und mit den experimentell ermittelten modalen Dämpfungsmaßen der Gesamtstruktur verglichen werden. Dies ermöglicht eine Einschätzung der Vorhersagekraft des Ansatzes zur mathematischen Dämpfungsbeschreibung je nach Dämpfungstyp.

In Kap. 6.6 werden die in Kap. 5.3 gewonnenen Erkenntnisse zur Sensitivität von Verlustfaktoren und zur computergestützten Parameteranpassung an den realen Test- und Analysedaten der Laborstruktur zur Verbesserung der Dämpfungsbeschreibung des Gesamtsystems angewandt.

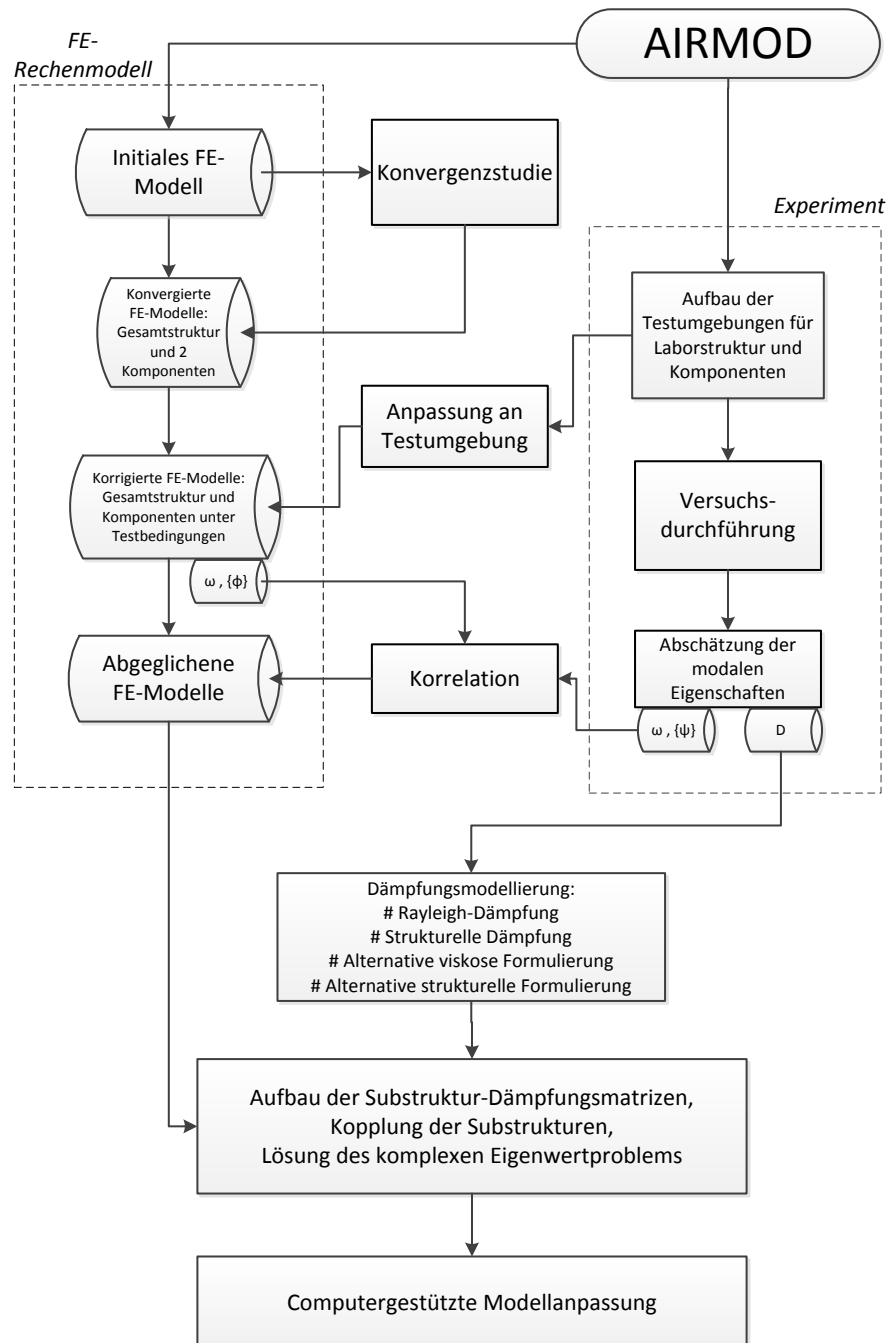


Abbildung 1.1.: Flussdiagramm zur Durchführung der Abschlussarbeit





## 2. Theorie zur Strukturodynamik von Mehr-Freiheitsgrad-Systemen

Dieses Kapitel erläutert die benötigten theoretischen Grundlagen zur Strukturodynamik von Mehr-Freiheitsgrad-Systemen. Es legt dabei einen besonderen Schwerpunkt auf die grundlegend getroffenen, elastomechanischen Annahmen, die einen Übergang vom Kontinuum zum diskretisierten Mehr-Freiheitsgrad-System und eine modale Betrachtungsweise ermöglichen, sowie auf die Bestimmung modaler Eigenschaften. Ein zweiter Schwerpunkt liegt auf Modellierungsansätzen, um Dämpfungskräfte in Strukturen auf einfache Weise zu beschreiben.

### 2.1. Grundlegende Annahmen

Strukturen werden ursprünglich als **Kontinua** mit unendlich vielen Freiheitsgraden angesehen. Ihr Schwingungsverhalten kann analytisch durch partielle Bewegungsdifferentialgleichungen beschrieben werden, wenn einige grundlegende umfangreiche Annahmen getroffen werden.

Diese Annahmen schließen insbesondere kleine Verschiebungen, ein linear-elastisches Materialverhalten, ein Gleichgewicht von extern und intern wirkenden Kräften resultierend aus Trägheit und Steifigkeit sowie kinematische Bedingungen ein [16].

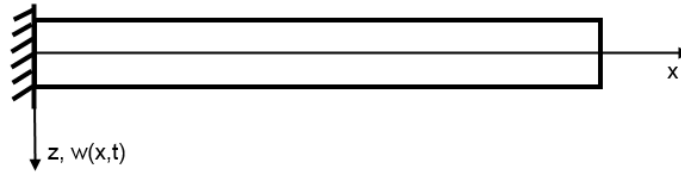
Für einen schubstarren, biegeelastischen, schlanken BERNOLLI-Balken der Länge  $l$  mit der Ortskoordinate  $x$  und einer konstanten Massen- und Biegesteifigkeitsverteilung  $\mu(x) = \text{const}$  und  $EI(x) = \text{const}$  lautet die homogene partielle Bewegungsdifferentialgleichung

$$EIw''''(x, t) + \mu\ddot{w}(x, t) = 0 \quad (2.1)$$

Die Koordinate  $x$  ist entlang der neutralen Faser modelliert. Biegung und Dehnung sind bezüglich der neutralen Faser entkoppelt und der Verschiebungszustand kann allein durch die Querverschiebung  $w(x, t)$  beschrieben werden. Zur Lösung der homogenen, partiellen Bewegungsdifferentialgleichung wird der Bewegungsverlauf  $w(x, t)$  auf Grundlage des Produktsatzes von BERNOLLI als Produkt einer ortsabhängigen Biegelinie und einer Zeitfunktion  $q(t)$  geschrieben

$$w(x, t) = w(x)q(t) \quad (2.2)$$

Dies ermöglicht eine Vereinfachung der partiellen Differentialgleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen, die getrennt gelöst werden können. Mit der Annahme transienter Schwin-



**Abbildung 2.1.:** Einseitig eingespannter Balken [eigene Darstellung]

gungen setzt man die Lösung der gewöhnlichen zeitabhängigen Differentialgleichung mittels des Exponentialansatzes an.

$$q(t) = \hat{q}_1 e^{i\omega_0 t} + \hat{q}_2 e^{-i\omega_0 t} \quad (2.3)$$

Auch die Lösung der gewöhnlichen ortsabhängigen Differentialgleichung setzt man mithilfe eines Exponentialansatzes an, in der Annahme, dass die n-te Verschiebungsform  $w(x)$  sich aus trigonometrischen Funktionen zusammensetzt. Unter Einsatz von RAYLEIGH-Funktionen und mittels Einarbeitung aller geometrischen und physikalischen Randbedingungen gelangt man zur Eigenwertgleichung und zur Beschreibung von Eigenschwingungsformen  $w_n(x, \lambda_n)$  des Balkenelements. Die Eigenwertgleichung, meist eine trigonometrische Funktion, ermöglicht die Bestimmung von Eigenwerten  $\lambda_n$  und daraus  $\omega_n$ .

Die Eigenwertgleichung weist auf diese Weise darauf hin, dass es unendlich viele Eigenwerte  $\lambda_n$  und somit unendlich viele Eigenschwingungsformen  $w_n(x, \lambda_n)$  des einseitig eingespannten Balkens gibt. Die Gesamtlösung gemäß Produktansatz Gl. (2.2) lautet

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) q_n(t) \quad (2.4)$$

Die n-te Eigenform  $w_n(x)$  trägt gleichzeitig mit allen anderen Eigenformen zur Bewegung  $w(x, t)$  des Balkenkontinuums bei. Sie ist unveränderlich, hat aber eigene zeitlich abhängige Amplituden und schwingt harmonisch mit einer eigenen Eigenfrequenz  $\omega_{0,k}$ . Sie kann als eine stehende Welle visualisiert werden [16].

Bei der Betrachtung von harmonisch erregten Schwingungen wird der Ansatz verwendet, dass das System im eingeschwungenen Zustand ausschließlich mit der Erregerfrequenz  $\Omega$  schwingt

$$w(x, t) = w(x) \sin(\Omega t) \quad (2.5)$$

Eine Errechnung des Verschiebungszustandes  $w(x, t)$  ergibt, dass bestimmte Erregerfrequenzen  $\Omega_n$  rein rechnerisch unendlich große Verschiebungen hervorrufen können. Diese kritischen Erregerfrequenzen  $\Omega_n$  stimmen mit den Eigenfrequenzen  $\omega_{0,n}$  des betrachteten Systems überein und kennzeichnen den Resonanzfall. Auch bei realen, gedämpften Systemen erregen sie die Schwingungen zu sehr großen Amplituden. Sie lassen das System dann in der zur Eigenfrequenz  $\omega_{0,n} = \Omega_n$  zugehörigen n-ten Eigenschwingungsform  $w_n(x)$  schwingen, da diese dominant ist [16].

Die dargelegten Ansätze, insbesondere die konstante Massen- und Steifigkeitsverteilung, das linear-elastische Materialverhalten, das Elastizitätsgesetz, die Gleichgewichtsbedingungen und

der Separationsansatz, ermöglichen die analytische Beschreibung der Bewegung des Kontinuums über die Zeit. Diese Ansätze lassen sich für die Beschreibung bei zusätzlichen Dimensionen, zusätzlichen Eigenschaften (bspw. Schubweichheit) und anderen Typen von Kontinua (bspw. Flächentragwerke) anwenden und erweitern, sodass eine mathematische Lösung bestimmter grundlegender Kontinuumsэлеmente existiert. Die analytische Beschreibung wird aber schnell deutlich komplizierter [16].

Die Bestimmung der partikulären Lösung der partiellen Bewegungsdifferentialgleichungen der Kontinua lässt sich durch eine **modale Entkopplung** wesentlich vereinfachen. Sie zielt dabei zentral auf eine Vereinfachung der Anpassung der Anfangsbedingungen. Sie bedient sich hierzu der dargelegten Annahme in Gl. (2.4), dass die Bewegungen des Gesamtsystems sich aus  $n$  systeminhärenten, festen Eigenformen zusammensetzen, das System daher nur  $n$  Freiheitsgrade im mathematischen Sinn besitzt und schwingende Kontinua sich somit in eine Anzahl  $n$  entkoppelter Ein-Freiheitsgrad-Systeme überführen lassen [16].

Die erfolgreich errechneten Eigenschwingungsformen, beim behandelten BERNOULLI-Balken  $w_n(x)$ , sind die Grundlage für die modale Zerlegung. Die Eigenformen  $w_n(x)$  werden im Folgenden als  $\phi_n(x)$  weiterverwendet.

Die Gesamtantwort  $w(x, t)$  erfolgt wie in Gl. (2.4) weiterhin aus der Superposition

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t) \quad (2.6)$$

Zur Durchführung der modalen Zerlegung sind Orthogonalitätsbedingungen erforderlich. Sie ergeben sich aus der Lösung der separierten gewöhnlichen ortsabhängigen Differentialgleichung, sodass die Massen-Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^l \mu \phi_k(x) \phi_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k \\ m_{gen,j} \neq 0 & \text{für } j = k \end{cases} \quad (2.7)$$

und die Steifigkeits-Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^l EI \phi_k''(x) \phi_j''(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k \\ k_{gen,j} \neq 0 & \text{für } j = k \end{cases} \quad (2.8)$$

lauten. Die Relationen Gl. (2.7) und Gl. (2.8) beschreiben, dass alle Eigenschwingungsformen  $\phi_n(x)$  unter Einschluss der Massen- bzw. Steifigkeitseigenschaften orthogonal zueinander sind. Die Eigenformen  $\phi_n(x)$  alleine sind dagegen untereinander nur linear unabhängig [16].

Die Größe  $m_{gen,j}$  wird als generalisierte Masse der j-ten Eigenform bezeichnet und errechnet sich aus Massenbelegung  $\mu$  und der j-ten Eigenschwingungsform  $\phi_j(x)$ . Die Größe  $k_{gen,j}$  wird als generalisierte Steifigkeit der j-ten Eigenform bezeichnet und ist abhängig von Biegesteifigkeit  $EI$  und der j-ten Eigenschwingungsform  $\phi_j(x)$ . Beide Größen sind somit mit der jeweiligen Eigenform gewichtet und stellen modale Eigenschaften dar [16].

Orthogonalitätsrelationen und modale Eigenschaften erlauben eine einfachere Anpassung der Gesamtlösung Gl. (2.6) an die Anfangsbedingungen. Weiterhin ermöglichen sie übersichtlichere

Lösungen bei freien Schwingungen und Schwingungen aus harmonischer und transients Erregung, indem sie bei vorab bekannten Eigenschwingungsformen  $\phi_n(x)$  die partielle Bewegungsdifferentialgleichung Gl. (2.1) mittels des Ansatzes Gl. (2.6) unkompliziert in eine unendliche Anzahl  $n$  gewöhnlicher entkoppelter Differentialgleichungen der Form

$$m_{gen,n}\ddot{q}_n(t) + k_{gen,n}q_n(t) = 0 \quad (2.9)$$

überführen.  $q_n(t)$  kennzeichnet dabei den zeitlichen Amplitudenverlauf der  $n$ -ten Eigenform  $\phi_n(x)$ , äquivalent zu  $q_n(t)$  in Gl. (2.6). Infolge Gl. (2.9) kann die Eigenfrequenz für die  $n$ -te Eigenform folgendermaßen, wie bei einem Einfreiheitsgradsystem, berechnet werden zu

$$\omega_{0,n} = \sqrt{\frac{k_{gen,n}}{m_{gen,n}}} \quad (2.10)$$

Die gezeigten Beziehungen gelten hier für einen Balken, lassen sich aber ebenso für andere Typen von Kontinua wie Platten, Scheiben oder Schalen aufstellen und anwenden, auch wenn die Eigenformen sich in zwei oder drei Dimensionen bewegen [16].

Die erfolgte analytische Bestimmung der Eigenformen  $\phi_n(x)$  wurde bisher vorausgesetzt, um die modale Zerlegung erfolgreich anwenden zu können. Die Berechnung oder bereits die Abschätzung von Eigenformen selbst für regelmäßig gebaute und stark idealisierte Strukturen ist aber sehr schwierig. Sie erfordert daher den schrittweisen Übergang zum **Mehrkörpersystem** und später in Kap. 2.2 zum diskretisierten Kontinuum [16].

Der Übergang gelingt beispielsweise mithilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen, welches auf einem Energiegleichgewicht und einem virtuellen Verschiebungszustand basiert. Mithilfe dieses oder eines ähnlichen Prinzips kann ein Energiegleichgewicht in Form einer partiellen Differentialgleichung für ein Kontinuum mit einer endlichen Zahl  $k$  an finiten Abschnitten aufgestellt werden. Diese Abschnitte müssen konstante Materialparameter besitzen, dürfen nur an ihren Enden diskrete Massen, Federn oder Dämpferelemente und erhalten jeweils ein lokales Koordinatensystem [16].

Eine modale Zerlegung des Systems ist auch hier möglich und benötigt bekannte globale Verschiebungszustände  $\phi(x_k)$ , die willkürlich gewählt werden können, aber hinreichend stetig sein und die geometrischen Randbedingungen an den Enden und Übergangsbedingungen zwischen den Abschnitten erfüllen müssen [16].

Unter Verwendung dieser Verschiebungszustände  $\phi(x_k)$  zur Beschreibung der wirklichen und virtuellen Verschiebungen werden Orthogonalitätsrelationen erhalten.

$$m(\phi_j, \phi_k) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ m_{gen,n} \neq 0 & \text{für } j = k \end{cases} \quad (2.11)$$

$$s(\phi_j, \phi_k) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ k_{gen,n} \neq 0 & \text{für } j = k \end{cases} \quad (2.12)$$

Analog zu Gl. (2.10) gilt auch beim Prinzip der virtuellen Verrückungen.

$$\omega_{0,k} = \sqrt{\frac{s(\phi_k, \phi_k)}{m(\phi_k, \phi_k)}} \quad (2.13)$$

Das hier verwendete Prinzip der virtuellen Verrückungen ermöglicht also, generalisierte Steifigkeiten und Massen und wiederum Eigenfrequenzen eines in  $n$  gleichartige Abschnitte unterteilbaren Balkens oder auch Rahmentragwerks unter den dargelegten Annahmen relativ einfach zu berechnen und so eine modale Entkopplung zu betreiben. Das Prinzip wird bei der Abschätzung von Eigenfrequenzen beim RAYLEIGH-Quotienten und beim RITZ'schen Verfahren genutzt und ist Grundlage für die weitere Verwendung bei der FEM in Kap. 2.2 [16].

## 2.2. Diskrete Modellierung von Mehrfreiheitsgradsystemen

### 2.2.1. Anwendung der Finite-Elemente-Methode

Das RITZ'sche Verfahren bietet auf Grundlage des Prinzips der virtuellen Verrückungen bereits weitreichende Möglichkeiten zur diskreten Beschreibung von Kontinua. Es ist aber immer nur begrenzt einsetzbar, da global auftretende Formfunktionen im Voraus zumindest ansatzmäßig bekannt sein oder entwickelt werden müssen. Dies kann bei komplizierteren, mehrdimensionalen Strukturen sehr mühsam sein [16].

Die FEM greift das RITZ'sche Verfahren auf, zerlegt die Struktur aber in endlich viele geometrisch einfache Elemente. Sie wendet auf diese Elemente lokal begrenzte Ansatzfunktionen an, muss aber Übergangsbedingungen an den Elementgrenzen, Knoten genannt, erfüllen, damit die Methode weiterhin zur strukturmechanischen Berechnung der gesamten Struktur verwendet werden kann. Die FEM ist damit keinen Einschränkungen bei ihrer Anwendung unterworfen und kann auf Strukturen jedweden Typs angewandt werden [16].

Die FEM überführt somit das Kontinuum in ein diskretes System finiter Elemente und gelangt durch diese Diskretisierung und der Anwendung von Ansatzfunktionen zu einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$[M] \{\ddot{u}(t)\} + [K] \{u(t)\} = \{p(t)\} \quad (2.14)$$

mit quadratischen Systemmatrizen  $[K]$  und  $[M]$ . Die zeitabhängigen Vektoren  $\{u\}$  bestehen dabei nur noch aus den Freiheitsgraden an den Abschnittsgrenzen.

Für jedes Element gilt eine partielle Bewegungsdifferentialgleichung, beim angeführten schubstarren Balken in Kap. 2.1 bspw. gilt Gl. (2.1). Die Beschreibung der Bewegung gibt vor, welche geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen an den Knoten abhängig von Lagerung, Gelenken oder Verzweigungen gelten und mit welchen Freiheitsgraden folglich die Knotenbewegung beschrieben wird. Beim schubstarren Balken ist dies bspw. Querverschiebung  $w$  und Neigung der neutralen Faser  $w'$ . Mit  $m$  Knoten und  $n$  Freiheitsgraden, die die Knotenverschiebung beschreiben und die Rand- und Übergangsbedingungen erfüllen, ergeben sich bei  $n$  Elementverschiebungsfreiheitsgraden  $u_{Elm}$  für  $m$  Elemente  $m \cdot n$  Gesamtsystemfreiheitsgrade.

Für die Struktur wird nun das Prinzip der virtuellen Verrückungen angewandt. Als Ansatz für die realen und virtuellen Verformungen elementweiser Abschnitte wird eine Linearkombination aus Funktionen  $N$  und den Elementverschiebungsfreiheitsgraden  $u_{Elm}$  verwendet.

Der Verformungsansatz für das  $k$ -te Balkenelement der Länge  $l_k$  lautet dann beispielsweise

$$w_k(x_k, t) = \begin{Bmatrix} N_1(x_k) & N_2(x_k) & N_3(x_k) & N_4(x_k) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w(0, t) \\ w'(0, t) \\ w(l_k, t) \\ w'(l_k, t) \end{Bmatrix} = \langle N_k(x_k) \rangle \{u(t)\}_{Elm} \quad (2.15)$$

Jedem der Elementverschiebungsfreiheitsgrade  $u_{Elm}(t)$  wird eine Form-, Basis- oder Ansatzfunktion  $N(\xi)$  zugewiesen. Sie haben die mathematische Form von Polynomen und interpolieren die Verschiebungen innerhalb des Elements abhängig von den dazugehörigen Elementverschiebungsfreiheitsgraden. Sie basieren auf den natürlichen Koordinaten  $\xi$  des Elements und können deshalb standardisiert für alle gleichartigen Elemente formuliert werden [16][41][5].

Die Formfunktionen  $N(\xi)$  sind nur noch abhängig vom Ort innerhalb der Elementgrenzen, die Freiheitsgrade nur noch von der Zeit. Die Formfunktionen sind für ein Element von endlicher Anzahl, sodass zur Reduzierung des Diskretisierungsfehlers eine Struktur je nach Anspruch fein segmentiert werden muss [16][5].

Für den virtuellen Verschiebungszustand ergibt sich analog beim Balken

$$\partial w_k(x_k, t) = \langle \partial u(t) \rangle_{Elm} \{N(x_k)\} \quad (2.16)$$

Die Ansätze können in ein Energiegleichgewicht, bspw. dem Prinzip der virtuellen Verrückungen, eingesetzt werden und ermöglichen die Bildung der Elementsteifigkeitsmatrix  $[K]_{Elm}$  und der Elementmassenmatrix  $[M]_{Elm}$ .

$$[K]_{Elm,k} = \int_0^{l_k} (EI)_n \{N_k''(x_k)\} \langle N_k''(x_k) \rangle dx_k \quad (2.17a)$$

$$[M]_{Elm,k} = \int_0^{l_k} \mu_n \{N_k(x_k)\} \langle N_k(x_k) \rangle (x_n) dx_k \quad (2.17b)$$

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen wird so in eine diskretisierte Form übertragen, in der keine Integrale mehr auftreten.

Zuletzt werden die Vektoren mit den lokalen Knotenverschiebungsfreiheitsgraden der  $n$  Elemente  $\{u_{Elm,n}(t)\}$  durch einen global gültigen Gesamtsystemverschiebungsvektor  $\{u(t)\}$  mithilfe einer linearen Transformation durch die Transformationsmatrix  $[T]_{Elm,n}$  ausgedrückt [16].

$$\{u(t)\}_{Elm,n} = [T]_{Elm,n} \{u(t)\} \quad (2.18a)$$

$$\langle \partial u(t) \rangle_{Elm,n} = \langle \partial u(t) \rangle [T]_{Elm,n}^T \quad (2.18b)$$

Der Gesamtverschiebungsvektor  $\{u(t)\}$  enthält von allen  $n$  Elementen alle Knotenverschiebungsfreiheitsgrade, die zu einem Zeitpunkt  $t$  einen anderen Wert als 0 annehmen können.

Der Einsatz des Gesamtverschiebungsvektors erfüllt somit Rand- und Übergangsbedingungen des Systems. Man erhält eine Umformung

$$\begin{aligned}
 & \sum_1^n \langle \partial u(t) \rangle_{Elm,n} [K]_{Elm,n} \{u(t)\}_{Elm,n} \\
 &= \langle \partial u(t) \rangle \left[ \sum_1^n [T]_{Elm,n}^T [K]_{Elm,n} [T]_{Elm,n} \right] \{u(t)\} \\
 &= \langle \partial u(t) \rangle [K] \{u(t)\}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Die gleiche Vorgehensweise wird bei den Elementmassenmatrizen  $[M]_{Elm,n}$  zur Synthese der Systemmassenmatrix  $[M]$  angewandt.

Die Finite-Elemente-Methode ermöglicht somit für eine idealisierte Struktur, bestehend aus mehreren gleichartigen Elementen, eine Formulierung eines Systems gewöhnlicher, gekoppelter Differentialgleichungen gemäß Gl. (2.14). Sie stellt ein Diskretisierungsverfahren dar, das die Gleichgewichtsbedingungen bzw. gleichwertigen Energieaussagen der Einzelemente als Grundlage nutzt. Dadurch ist sie außer für den angeführten schubstarren BERNOLLI-Balken auch für andere Elementtypen wie Platten, Schalen und Würfel anwendbar. Durch die Verbindung von Einzelementen mittels Übergangsbedingungen kann sie beliebige Tragwerkstypen, Rahmentragwerke, Flächentragwerke und dreidimensionale Kontinua behandeln, solange die Ansatzfunktionen  $N$  die geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen erfüllen [16][5][10].

Die FEM stellt somit das effizienteste Verfahren zur Berechnung der Auslenkungen beliebig geformter Strukturen mittels Diskretisierung dar. Zu beachten ist, dass sie höhere Eigenfrequenzen als die analytisch exakten Lösungen berechnet, da die Systemsteifigkeit durch die Annahme bestimmter Elementverformungen infolge festgelegter Formfunktionen  $N$  künstlich erhöht wird [5].

### 2.2.2. Formulierung isoparametrischer Elemente

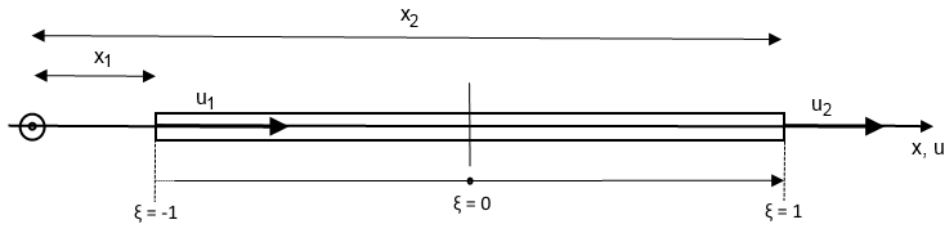
Ein wichtiger Abschnitt des FE-Lösung ist die Berechnung der Elementmatrizen. Bei isoparametrischen finiten Elementen besteht der Ansatz darin, eine Beziehung zwischen den Verschiebungen an einem beliebigen Punkt  $\xi$  des Elements und den Verschiebungen der Knotenfreiheitsgrade  $\{u_{Elm}\}$  des Elements durch Form- bzw. Ansatzfunktionen  $N$  herzustellen.

Als Beispiel wird hier das Element des eindimensionalen Fachwerksstabes angeführt, dargestellt in Abb. 2.2.

Der erste Schritt ist die Aufstellung einer Beziehung zwischen den globalen physikalischen Koordinaten  $x$  zu den natürlichen Koordinaten  $\xi$  des Elements

$$x = \sum_{k=1}^2 N_k(\xi) x_k \tag{2.20}$$

wobei  $N_1(\xi)$  und  $N_2(\xi)$  die Ansatzfunktionen darstellen. Die globalen Verschiebungen  $u$  längs



**Abbildung 2.2.:** Fachwerksstab mit zwei Knoten an beiden Enden [eigene Darstellung]

$x$  des Stabes werden in der gleichen Weise ausgedrückt.

$$u = \sum_{k=1}^2 N_k(\xi) u_k \quad (2.21)$$

Die Benutzung der gleichen Ansatzfunktionen  $N$  für die Elementkoordinaten und Elementverschiebungen ist die Grundlage der Formulierung isoparametrischer Elemente.

Die Ableitung der Beziehung Gl. (2.20) zwischen globalen und natürlichen Koordinaten verknüpft die Länge  $d\xi$  innerhalb des  $k$ -ten Elements mit einer Länge  $dx$  im globalen Koordinatensystem

$$dx = J_{Elm,k} d\xi \quad (2.22)$$

Bei zwei- und dreidimensionalen Elementen ist  $J_{Elm,k}$  eine Matrix  $[J]_{Elm,k}$ , welche die Fläche bzw. das Volumen zwischen den zwei bzw. drei Koordinatenformulierungen verknüpft. Große Unterschiede zwischen den Determinanten  $\det[J]_{Elm}$  der Elemente implizieren stark verzerrte Abbildungen und dementsprechend schlecht geformte Elemente und hohe Approximationsfehler [5].

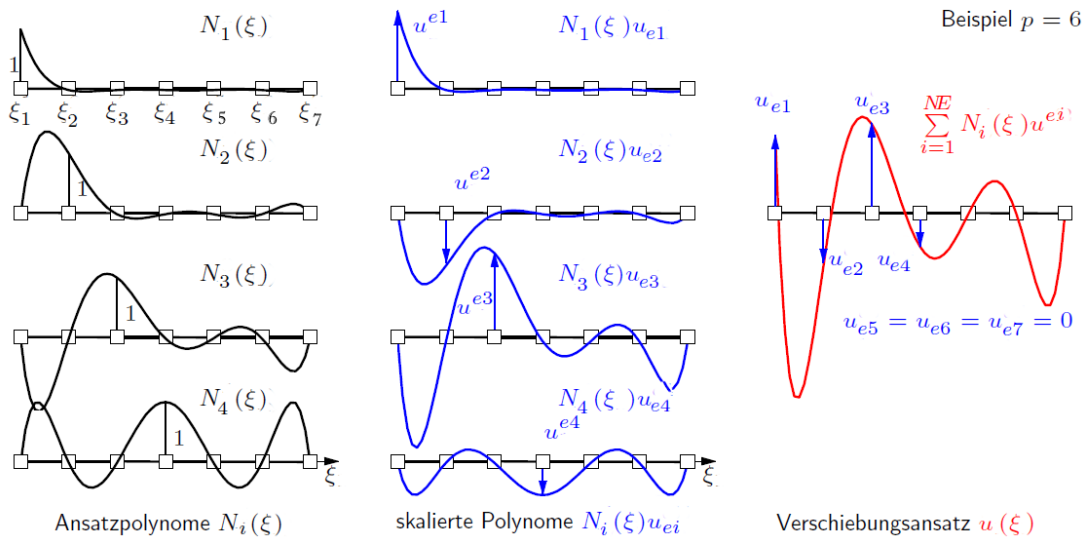
Die Funktionen  $N$  haben die fundamentale Eigenschaft, dass die  $k$ -te Funktion  $N_k(\xi)$  an genau einem Knoten für einen der Elementverschiebungsfreiheitsgrade, also an einer Koordinate  $x_k$ , genau den Wert 1 und für alle anderen 0 annimmt [5].

Die Qualität der Formfunktionen  $N$  kann durch den Typ der Funktion festgelegt werden. Diese Typen sind vielfältig. Zwei verbreitete Arten sind HERMITE'sche und LAGRANGE'sche Polynome. Der Vorteil bei Polynomen dieser Art ist eine exakte, numerisch effiziente Integration durch die GAUSS-Quadratur, welche mittels einer Summe von gewichteten Funktionswerten an bestimmten Stützstellen der Ansatzfunktionen  $N$  eine Annäherung mit hoher Genauigkeit durchführt [46][5].

Der Grad  $p$  der verwendeten Polynome charakterisiert die Approximation. Die Elemente, die diese Polynome der Ordnung  $p$  nutzen, werden dann vereinfachend „Elemente der Ordnung  $p$ “ genannt.

Abb. 2.3 verdeutlicht den Grad  $p$  bei einem Fachwerkstab mit einem einzigen Verformungszustand der Knoten - der Verschiebung  $u_e$  - wobei in diesem Fall  $p = 6$  gilt. Bei einem Element





**Abbildung 2.3.:** Verwendung von Ansatzfunktionen zur Annäherung des Verschiebungsfeldes eines Fachwerkstabes (angepasst aus [27])

der Ordnung  $p$  befinden sich zwei Knoten an den zwei Enden des Elements und  $p - 1$  „innere“ Knoten gleichmäßig verteilt dazwischen. Es muss also  $p + 1$  Ansatzfunktionen  $N_k$  geben, die jeweils für den  $k$ -ten Knoten  $N(\xi_k) = 1$  werden und für alle anderen Knoten 0 werden. Dadurch sind die Verschiebungen jedes  $k$ -ten Elementfreiheitsgrades  $u_{ek}$  abgedeckt. Die Ansatzfunktionen  $N$  haben dann den Polynomgrad  $p$ , damit die Verformung durch eine stetige Funktion dargestellt werden kann [5].

Die Ansatzfunktionen werden dann mit der Verschiebung ihrer zugehörigen Knotenverformung skaliert, um den Gesamtverformungszustand des finiten Elements auszudrücken. Für den Fachwerkstab lautet dann das gegenüber Gl. (2.21) veränderte approximierte Verschiebungsfeld

$$u(\xi) \approx \sum_{k=1}^{p+1} N_k(\xi) u_{ek} \quad (2.23)$$

Dieses Verfahren für den Polynomgrad  $p$  kann in der gleichen Weise auf zwei- und dreidimensionale Elemente angewandt werden. Es ist deshalb so attraktiv, weil beliebig viele Knoten zur Beschreibung des Elements hinzugefügt werden können [5].

Eine größere Anzahl von Formfunktionen kann eine größere Anzahl von Verschiebungsfällen innerhalb des Elements darstellen, sodass der auftretende Diskretisierungsfehler verringert wird [5].

Zur Verringerung des Diskretisierungsfehlers wird vor der Verwendung einer bestimmten Elementierung eines FE-Modells das Konvergenzverhalten untersucht.

Das Konvergenzverhalten eines Modells beschreibt die Veränderung der numerischen FE-Lösung bei steigender Anzahl der verwendeten Elemente. Konvergenz liegt dann vor, wenn die FE-Lösung mit steigender Elementanzahl zur analytischen Lösung der Differentialgleichungen des Modells konvergiert [5].

Konvergenzfehler beschreiben die prozentuale Abweichung der FE-Lösung nach einer Netzverfeinerung des Modells gegenüber der Lösung mit dem gröberen Netz aus dem vorherigen Schritt. Ist der Konvergenzfehler ausreichend niedrig, aber fehlt eine exakte analytische Lösung als Zielwert, kann die Konvergenz nur daran gemessen werden, dass in diesem Fall alle grundlegenden Bedingungen des mathematischen Modells erfüllt werden [5].

Die zwei Voraussetzungen für Konvergenz sind kompatible und komplette Elemente. Kompatibilität besagt, dass alle Koordinaten und Verschiebungen der anliegenden Elementkanten und -flächen gleich sein müssen. Kompatibilität ist im vorliegenden Fall erfüllt, weil anliegende Elementkanten und -flächen die gleichen Knoten haben und alle Elemente gleicher Ordnung sind. Komplettheit besagt, dass die Elemente Starrkörperverschiebungen und konstante Dehnungszustände darstellen können [5].

Die Untersuchung des Konvergenzverhaltens bei Netzverfeinerung wird als h-Methode bezeichnet. Die Untersuchung der Konvergenz bei Erhöhung des Polynomgrads der Interpolationsfunktionen  $N$  wird als p-Methode bezeichnet. Eine gleichzeitige Anwendung beider Methoden wird h/p-Methode genannt und gilt als effizienteste und robusteste Methode der Netzanpassung. Die Konvergenzgeschwindigkeit ist bei Anwendung der p-Methode oder h/p-Methode deutlich höher als bei der h-Methode. Die konvergierte Lösung ist aber nur dann verwertbar, wenn das FE-Netz das physikalische Problem auch bereits bei Polynomen erster Ordnung angemessen abbilden kann [5].

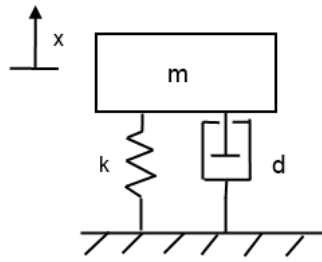
## 2.3. Berücksichtigung von Dämpfung

Dämpfung wurde in den bisherigen Betrachtungen in Kap. 2.1 und Kap. 2.2 aufgrund der einfacheren Darstellung der Schwingungsmechanismen vernachlässigt. Sie ist aber genau wie Steifigkeit und Masse ein wesentliches Element von Schwingungssystemen, denn sie ist in allen Strukturen enthalten und für das Abklingen von Bewegungsvorgängen verantwortlich. Im Gegensatz zu Masse und Steifigkeit lässt sie sich sehr schwer beschreiben und wird deshalb vorwiegend mithilfe experimenteller Dämpfungsparameter, bspw. aus Standschwingungsversuchen bei Flugzeugen, gemessen und dann im FE-Rechenmodell durch eine angemessene Modellierung näherungsweise abgeschätzt [41][16].

Dämpfung bewirkt, dass aus dem schwingenden System durch irreversible Prozesse fortwährend Energie dissipiert, also dem Vorgang entnommen und in Wärmeenergie umgewandelt wird. Der Energiebetrag im System wird also kleiner, sodass eine freie Schwingung nach endlicher Zeit zum Erliegen kommt und die Amplitude konstant harmonisch erregter Systeme sinkt [41].

Dämpfung kann aus Materialeigenschaften resultieren. Diese innere Materialdämpfung ist abhängig von der Temperatur, der Art der Beanspruchung und bei periodischer Belastung von der Frequenz [41].

Innere Dämpfung kann sich auch zu einem großen Teil aus konstruktiv oder technisch bedingten Anordnungen ergeben, die zu Reibungserscheinungen bei Kontaktflächen führen, bspw. bei



**Abbildung 2.4.:** Ein-Freiheitsgrad-System [eigene Darstellung]

Schraubverbindungen durch die Berührung der Schraube mit den verspannten Teilen und der Teile untereinander [41].

Äußere Dämpfung ist der Reibung mit umgebenden Medien geschuldet, bspw. mit Luft oder Flüssigkeiten [41].

Dämpfung wird im Folgenden durch die Einführung von geeigneten mechanischen Größen in vorangegangenen Annahmen in seiner Wirkungsweise und seinem Einfluss gesondert charakterisiert werden.

Mechanische Systeme, modelliert als Ein-Freiheitsgrad-Systeme wie in [Abb. 2.4](#), berücksichtigen Dämpfungskraft im Allgemeinen entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung wirkend und proportional zur Geschwindigkeit. Solch ein System führt, angeregt durch Anfangsbedingungen und dann sich selbst überlassen, freie Schwingungen aus, die mit der Bewegungsdifferentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (2.24)$$

beschrieben werden können [6].  $m$  kennzeichnet die Masse,  $d$  die Dämpfungskonstante,  $k$  die Federkonstante und  $x(t)$  die Bewegung des einzigen Freiheitsgrades. Mit der Annahme transientser Schwingungen setzt man die Lösung der Differentialgleichung [Gl. \(2.24\)](#) mittels des Exponentialansatzes

$$x(t) = \hat{x}e^{\lambda t} \quad (2.25)$$

an, der durch Einsetzen auf die komplex konjugierten Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{m} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mk}{d^2}} \right] \quad (2.26)$$

führt. Durch die Einführung der bekannten Abkürzungen

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.27)$$

als Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems und

$$D = \frac{1}{2} \frac{d}{\sqrt{km}} = \frac{d}{2\omega_0 m} \quad (2.28)$$

als Dämpfungsgrad oder LEHR'sches Dämpfungsmaß kann man für die Eigenwerte  $\lambda_{1/2}$  auch in der Form

$$\lambda_{1/2} = -D\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-D^2} \quad (2.29)$$

schreiben. Bezeichnet man  $-\Re(\lambda)$  als Abklingkonstante  $\delta$  und  $\Im(\lambda)$  als gedämpfte Eigenkreisfrequenz  $\omega$ , kann die Darstellung der Eigenwerte weiter vereinfacht werden zu

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm i\omega \quad (2.30)$$

Mit den vorangestellten Beziehungen kann man für Gl. (2.24) auch schreiben

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (2.31)$$

Die Abklingkonstante bestimmt die Schnelligkeit des Abklingens einer freien Schwingung. Die Zeitkonstante  $\tau$  ist die Inverse der Abklingkonstante  $\delta$  und beschreibt, wann eine freie Schwingung auf etwa 37% ihrer anfänglichen Amplitude abgeklungen ist.

$$\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{D\omega_0} \quad (2.32)$$

Das Einsetzen der Eigenwerte in den Ansatz Gl. (2.25) liefert auch ohne das Wissen der Anfangsbedingungen und der daraus zu errechnenden Amplitude  $\hat{q}$  einen für das System charakteristischen Zeitverlauf. Dieser Verlauf ist begründet in dem Vorhandensein eines Realteils  $\delta$  in den Eigenwerten  $\lambda$ , der das Bild der Schwingungsbewegung wenig bis stark beeinflussen kann.

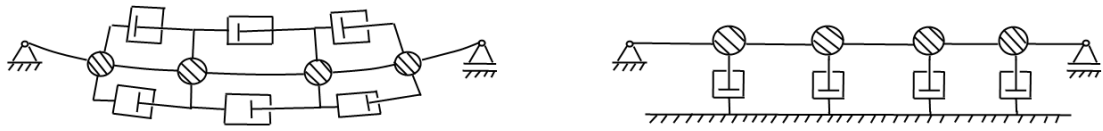
Für ein stabiles, linear-elastisches Kontinuum ist die Dämpfung in aller Regel  $1 - D^2 > 0$  unterkritisch. Eine überkritische Dämpfung  $D^2 - 1 > 0$  tritt nur bei sehr starker, künstlicher Dämpfung auf. Das System ist dadurch schwingungsfähig und der Zeitverlauf hat die Form einer transienten abklingenden Schwingung, bei metallischen Werkstoffen sehr schwach abklingend.

$|\Re(\lambda)| = |\delta|$  ist in diesem Fall im Vergleich zu  $|\Im(\lambda)|$  klein, der Dämpfungsgrad ist  $D \ll 1$  positiv und die gedämpfte Eigenkreisfrequenz  $\omega$  nur geringfügig kleiner als die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  ist [16][25].

Die folgenden vorgestellten Dämpfungsmodelle basieren auf unterschiedlichen Dämpfungstypen und haben den Vorteil, dass sie mit nur sehr wenigen Parametern eine analytisch bestandsfähige und einfach zu begreifende globale Systemdämpfung beschreiben können. Sie haben allerdings den Nachteil, dass sie die Realität nur sehr grob abbilden können.

### 2.3.1. Proportionale viskose Dämpfung

Um viskose Dämpfung im Schwingungsverhalten von Strukturen widerzuspiegeln, existieren mehrere Modelle, die erneut anhand eines idealisierten Balkens dargestellt werden.



(a) Steifigkeitsproportionale Dämpfung

(b) Massenproportionale Dämpfung

**Abbildung 2.5.:** Viskose Proportionaldämpfung (übernommen aus [16])

Das Modell der steifigkeitsproportionalen, viskosen, inneren Dämpfung nimmt ein viskoelastisches Materialverhalten gemäß dem KELVIN-VOIGT-Modell an, welches die Struktur durch parallel geschaltete Paare von Federn und Dämpfern charakterisiert, siehe Abb. 2.5a. Zusätzlich bedient sich das Modell der Annahme, dass die wirkenden Dämpfungskräfte proportional zur Steifigkeit sind, sodass an den Stellen, wo die Struktur steifer ist, höhere innere Dämpfungskräfte wirken [16]. Das Elastizitätsgesetz lautet demnach für ein isotropes Material

$$\sigma(x, t) = E (\epsilon(x, t) + g_{s,v} \dot{\epsilon}(x, t)) = E' \epsilon(x, t) + E'' \dot{\epsilon}(x, t) \quad (2.33)$$

mit der Spannung  $\sigma$ , der Dehnung  $\epsilon$ , dem Elastizitätsmodul  $E$  und dem Verlustfaktor  $g_{s,v}$  bzw. dem Speichermodul  $E'$  und dem Verlustmodul  $E''$ . Die Bewegungsdifferentialgleichung Gl. (2.1) mit den Annahmen aus Kap. 2.1 verändert sich dann zu

$$EI w''''(x, t) + g_{s,v} EI \dot{w}''''(x, t) + \mu \ddot{w}(x, t) = 0 \quad (2.34)$$

Das Modell der masseproportionalen, viskosen, äußeren Dämpfung nimmt an, dass die Struktur in einem zähen Medium gebettet ist, siehe Abb. 2.5b, und die Massenkräfte durch die veränderte Berechnung  $\mu(\ddot{w} + g_{m,v} \dot{w})$  geringer ausfallen. Das Modell geht von der Annahme aus, dass innere Dämpfungskräfte abhängig von der Massenkonzentration sind, und setzt sie daher proportional zur Masse an [16]. Die Bewegungsdifferentialgleichung lautet in diesem Fall

$$EI w''''(x, t) + \mu \ddot{w}(x, t) + g_{m,v} \mu \dot{w}(x, t) = 0 \quad (2.35)$$

Eine kombinierte Modellierung von masseproportionaler viskoser und steifigkeitsproportionaler viskoser Dämpfung wird RAYLEIGH-Dämpfung genannt [16][10]. Die Bewegungsdifferentialgleichung lautet

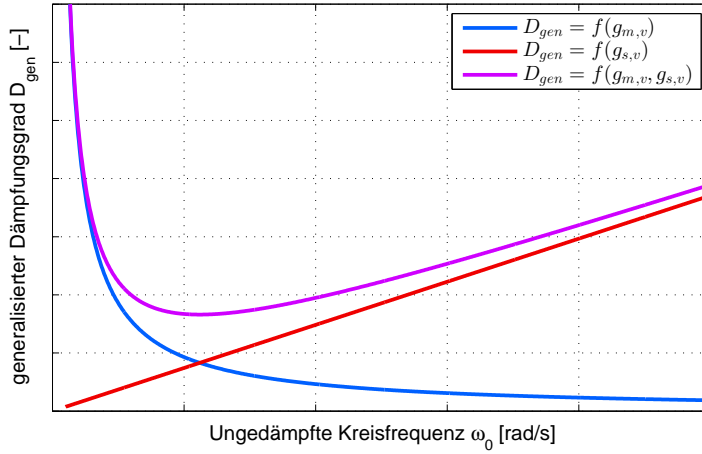
$$EI w''''(x, t) + g_{s,v} EI \dot{w}''''(x, t) + \mu \ddot{w}(x, t) + g_{m,v} \mu \dot{w}(x, t) = 0 \quad (2.36)$$

Der Ansatz Gl. (2.6) für die modale Zerlegung kann auch bei Berücksichtigung dieser Dämpfungsmodelle weiterhin angewandt werden, sodass die partiellen Bewegungsdifferentialgleichungen analog zu Gl. (2.9) in eine unendliche Anzahl  $n$  gewöhnlicher entkoppelter Differentialgleichungen der Form

$$m_{gen,n} \ddot{q}_n(t) + d_{gen,n} \dot{q}_n(t) + k_{gen,n} q_n(t) = 0 \quad (2.37)$$

überführt werden können.  $d_{gen,n}$  stellt dabei die generalisierte Dämpfungskonstante dar, im Falle der RAYLEIGH-Dämpfung

$$d_{gen,n} = g_{s,v} k_{gen,n} + g_{m,v} m_{gen,n} \quad (2.38)$$



**Abbildung 2.6.:** Verlauf des generalisierten Dämpfungsgrades über die Kreisfrequenz bei verschiedenen Proportionaldämpfungsmodellen

Analog zu Gl. (2.28) definiert man den generalisierten Dämpfungsgrad  $D_{gen,n}$  als

$$D_{gen,n} = \frac{1}{2} \frac{d_{gen,n}}{\sqrt{k_{gen,n} m_{gen,n}}} = \frac{d_{gen,n}}{2\omega_{0,n} m_{gen,n}} \quad (2.39)$$

Der k-te generalisierte Dämpfungsgrad  $D_{gen,k}$  gibt dabei Auskunft, wie stark die k-te Eigenform  $\phi_k(x)$  abhängig von ihrer Eigenfrequenz  $\omega_k$  gedämpft ist. Je nach Dämpfungsmodell variiert der Dämpfungsgrad unterschiedlich über die Frequenz [16].

Beim steifigkeitsproportionalen viskosen Modell mit  $d_{gen,k} = g_{s,v} k_{gen,k}$  wird der Dämpfungsgrad beschrieben durch

$$D_{gen,n} = \frac{1}{2} g_{s,v} \sqrt{\frac{k_{gen,n}}{m_{gen,n}}} = \frac{1}{2} g_{s,v} \omega_{0,n} \quad (2.40)$$

Hierbei steigt der generalisierte Dämpfungsgrad proportional zur Frequenz an. Beim masseproportionalen viskosen Modell mit  $d_{gen,k} = g_{m,v} m_{gen,k}$  wird der Dämpfungsgrad beschrieben durch

$$D_{gen,n} = \frac{1}{2} g_{m,v} \sqrt{\frac{m_{gen,n}}{k_{gen,n}}} = \frac{1}{2} g_{m,v} \frac{1}{\omega_{0,n}} \quad (2.41)$$

Dieser ist sehr hoch für Eigenformen niedriger Frequenzen, Starrkörpereigenformen eingeschlossen, und sinkt in Form einer gebrochenrationalen Funktion mit ansteigender Frequenz schnell ab. Bei der RAYLEIGH-Dämpfung addieren sich beide Effekte entsprechend Gl. (2.38).

In Abb. 2.6 ist der Verlauf des generalisierten Dämpfungsgrades über die Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$ , je nach Dämpfungsmodell und angewandtem Koeffizienten  $g$  dargestellt.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen ist auch mit den vorgestellten Proportionaldämpfungsmodellen weiterhin durchführbar. Man gelangt dann je betrachtetem finiten Abschnitt

zu einer Elementdämpfungsmatrix mit  $[D]_{Elm,n} = g_{s,v}[K]_{Elm,n}$ . Mithilfe der Transformationsmatrix  $[T]_{Elm}$  gelingt der Zusammenbau der Systemmatrizen  $[K]$ ,  $[D]$  und  $[M]$ , wobei bei einem für alle Elemente des Systems einheitlichem Verlustfaktor  $g_{s,v}$  gilt:  $g_{s,v}[K] = [D]$ . Bei elementweise unterschiedlichem  $g_{s,v,k}$  ist diese Beziehung nicht gültig.

Die Differentialgleichung des diskretisierten gedämpften Systems lautet allgemein

$$[M] \{\ddot{u}(t)\} + [D] \{\dot{u}(t)\} + [K] \{u(t)\} = \{0\} \quad (2.42)$$

Eine analoge Vorgehensweise ergibt sich für die massenproportionale ( $g_{m,v}[M] = [D]$ ) und die kombinierte RAYLEIGH-Dämpfung ( $g_{s,v}[K] + g_{m,v}[M] = [D]$ ) [16].

Ein weiteres Dämpfungsmodell ist die *Extended* RAYLEIGH-Dämpfung, auch als CAUGHEY-Dämpfung bekannt. Das Modell ist eine Generalisierung der RAYLEIGH-Dämpfung. Hierbei wird  $[D]$  durch die Beziehung

$$[D] = [M] \sum_c g_c \left( [M]^{-1} [K] \right)^c \quad (2.43)$$

mit beliebig gewählten  $c \in \mathbb{Z}$  ausgedrückt. Das Modell basiert auf Orthogonalitätsbedingungen diskreter Bewegungsdifferentialgleichungssysteme, die in Kap. 2.4.1 dargelegt sind [10][5].

Auf eine weitere Behandlung der CAUGHEY-Dämpfung wird verzichtet, da außerhalb eines bestimmten Frequenzbereichs die Dämpfung nicht mehr physikalisch sinnvoll ist und bei ungünstiger Wahl von  $c$  negativ werden kann [10].

### 2.3.2. Proportionale strukturelle Dämpfung

Bei duktilen, verformungsfähigen Werkstoffen, darunter Metalle und Stahlbeton, wird die Dämpfung durch viskoelastisches Materialverhalten nicht zutreffend beschrieben. Bei Experimenten mit harmonisch erzwungenen Schwingungen erwies sich, dass der Energieverlust je Periode unabhängig von der Kreisfrequenz ist und daher ein mit zunehmender Eigenfrequenz  $\omega$  abnehmender Koeffizient  $g_{s,s}$  als einigermaßen gut beschreibend für das Dämpfungsverhalten ist [41]. Dabei wird das steifigkeitsproportionale viskose Modell herangezogen und der Verlustfaktor  $g_{s,v}$  ersetzt durch

$$g_{s,v} = \frac{g_{s,s}}{\Omega} \quad (2.44)$$

mit der Erregerkreisfrequenz  $\Omega$ . Mit dem Ansatz, dass das System mit der Erregerkreisfrequenz antwortet, sodass  $q(t) = \hat{q}e^{i\Omega t}$ , lautet das Elastizitätsgesetz

$$\sigma(x, t) = E \left( \epsilon(x, t) + \frac{g_{s,s}}{\Omega} \dot{\epsilon}(x, t) \right) = E(1 + ig_{s,s})\epsilon(x, t) \quad (2.45)$$

Dämpfung darf bei Eigenschwingungen streng genommen nicht auf diese Weise mit dem strukturellen Verlustfaktor  $g_{s,s}$  modelliert werden, da das Werkstoffgesetz Gl. (2.45) aus Versuchen

mit harmonisch erzwungenen Schwingungen stammt. Dominiert aber zumindest eine Eigenform  $\phi_k(x)$  bei abklingender freier Schwingung, kann man  $\Omega = \omega_k$  setzen [16]. Der generalisierte Dämpfungsgrad ergibt sich dann zu

$$D_{gen,n} = \frac{1}{2} g_{s,s} \frac{\omega_k}{\Omega} \approx \frac{1}{2} g_{s,s} = \text{const} \quad (2.46)$$

Dieses Modell steifigkeitsproportionaler Struktur-, Werkstoff- bzw. Hysteresisdämpfung bewirkt somit, dass alle Eigenformen gleich stark gedämpft sind.

Bei der steifigkeitsproportionalen strukturellen Dämpfung vereinfacht sich das Elastizitätsgesetz Gl. (2.33) zu Gl. (2.45), sodass sich am Ende keine Systemdämpfungsmatrix, sondern eine komplexe Systemsteifigkeitsmatrix  $[K^c] = [K](1 + i g_{s,s}) = [K] + i[C]$  ergibt.

Zwei Ein-Freiheitsgrad-Systeme mit der Eigenkreisfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , die einerseits mit steifigkeitsproportionaler viskoser Dämpfung  $d = g_{s,v}k$  und andererseits mit struktureller Dämpfung  $c = g_{s,s}k$  versehen sind

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (2.47a)$$

$$m\ddot{x}(t) + icx(t) + kx(t) = 0 \quad (2.47b)$$

sind äquivalent, wenn gemäß Gl. (2.40) und Gl. (2.46) gilt

$$g_{s,s} = g_{s,v}\omega_0 \quad (2.48)$$

### 2.3.3. Proportionale modale Dämpfung

Die modale Dämpfung ist eine alternative Dämpfungsmodellierung, die einen j-ten experimentell ermittelten modalen Dämpfungsgrad  $D_{gen,j}$  in einer proportionalen Dämpfungsmatrix  $[D]$  oder  $[C]$  im FE-Rechenmodell exakt berücksichtigt. Sie basiert auf Orthogonalitätsbedingungen diskreter Bewegungsdifferentialgleichungssysteme, die in Kap. 2.4.1 nachgelesen werden können [10].

Im **viskosen** Fall wird eine diagonale, generalisierte Dämpfungsmatrix  $[D]_{gen} \in \mathbb{R}^{h \times h}$  aus den  $h$  identifizierten modalen Dämpfungsgraden  $D_{gen,h}$  des Experimentes, aus den ungedämpften Eigenfrequenzen  $\omega_{0,h}$  sowie den generalisierten Massen  $m_{gen,h}$  und der Modalmatrix  $[\Phi] \in \mathbb{R}^{m \times h}$  des FE-Rechenmodells mit  $m$  Freiheitsgraden aufgebaut.

$$[D]_{gen} = [\Phi]^T [D] [\Phi] = \begin{bmatrix} d_{gen,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{gen,2} & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & d_{gen,h} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Die generalisierte Dämpfungskonstante  $d_{gen,h}$  wird entsprechend Gl. (2.28) durch  $d_{gen,h} = 2D_{gen,h}\omega_{0,h}m_{gen,h}$  berechnet. Die unbekannte physikalische volle Dämpfungsmatrix  $[D] \in \mathbb{R}^{m \times m}$  kann durch die Rücktransformation

$$[D] = ([\Phi]^T)^{-1} [D]_{gen} ([\Phi])^{-1} = ([\Phi]^T)^{-1} [\Phi]^T [D] [\Phi] ([\Phi])^{-1} \quad (2.50)$$



errechnet werden. Praktisch bedeutet dies aber eine rechentechnisch aufwändige Inversion der Modalmatrix  $[\Phi]$  und ihrer Transponierten. Eine andere Möglichkeit, die physikalische Dämpfungsmatrix zu berechnen, ist

$$[D] = \sum_1^h [D]_h = [M] \left( \sum_1^h \frac{2D_{gen,h}\omega_{0,h}}{m_{gen,h}} \{\phi_h\} \{\phi_h\}^\top \right) [M] \quad (2.51)$$

Die Herleitung zu Gl. (2.51) kann in [10] oder im Anhang in Kap. A.1 nachgelesen werden.

In [37] wird die modale strukturelle Dämpfung als eine Abwandlung der vorgestellten modalen viskosen Dämpfung vorgestellt. Diese Abwandlung berücksichtigt modale Dämpfungsmaße  $D_{gen,j}$  nicht in einer proportionalen Dämpfungsmatrix  $[D]$  mittels viskoser Dämpfung, sondern berücksichtigt sie mittels **struktureller Dämpfung** in einer proportionalen Matrix  $[C]_{gen}$  als Teil einer komplexen Systemsteifigkeitsmatrix  $[K^c]_{gen} = [K]_{gen} + i[C]_{gen}$ .

Die Matrix  $[C]_{gen} \in \mathbb{R}^{h \times h}$  wird mit den  $h$  identifizierten modalen Dämpfungsgraden  $D_{gen,h}$  des Experimentes, aus den ungedämpften Eigenfrequenzen  $\omega_{0,h}$  sowie den generalisierten Massen  $m_{gen,h}$  und der Modalmatrix  $[\Phi] \in \mathbb{R}^{m \times h}$  des FE-Rechenmodells mit  $m$  Freiheitsgraden aufgebaut.

$$[C]_{gen} = [\Phi]^\top [C] [\Phi] = \begin{bmatrix} c_{gen,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{gen,2} & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & c_{gen,h} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

mit  $c_{gen,h} = 2D_{gen,h}k_{gen,h}$  entsprechend Gl. (2.46) [37].

Nutzt man die Orthogonalitätsbedingungen und rechnet die Herleitung wie bei der modalen viskosen Dämpfung, gelangt man schließlich zur vereinfachten Berechnungsvorschrift

$$\begin{aligned} [C] &= \sum_1^h [C]_h = [M] \left( \sum_1^h \frac{2D_{gen,h}k_{gen,h}}{m_{gen,h}^2} \{\phi_h\} \{\phi_h\}^\top \right) [M] \\ &= [M] \left( \sum_1^h \frac{2D_{gen,h}\omega_{0,h}^2}{m_{gen,h}} \{\phi_h\} \{\phi_h\}^\top \right) [M] \end{aligned} \quad (2.53)$$

Gl. (2.51) bzw. Gl. (2.53) besagen, dass der Beitrag  $[D]_h$  bzw.  $[C]_h$  an der Gesamtdämpfungsmatrix  $[D]$  bzw.  $[C]$  abhängig von dem entsprechenden modalen Dämpfungsgrad  $D_{gen,h}$  ist. Das bedeutet, dass nur die berücksichtigten  $h$  Eigenformen eine Dämpfung besitzen. Alle übrigen Eigenformen sind ungedämpft. Es ist aber wichtig, dass alle Eigenformen gedämpft sind, um überhöhte Antworten ungedämpfter Eigenformen zu unterbinden [10].

Für die Formulierung mittels  $[D]$  empfiehlt [10] daher eine Kombination dieser modalen Dämpfung mit einem zweiten Proportionalmodell, damit alle übrigen Eigenformen ebenfalls gedämpft sind. Dieses zweite Modell kann beispielsweise eine steifigkeitsproportionale viskose Dämpfung sein. Soll bspw. die Eigenform  $j \neq h$  einen modalen Dämpfungsgrad  $D_{gen,j}$  aufweisen, dann kann man den Koeffizienten  $g_{s,v}$  gemäß Gl. (2.40) zu  $g_{s,v} = 2D_{gen,j}/\omega_{0,j}$  ansetzen.

Für die Formulierung mittels  $[C]$  empfiehlt [37] eine Kombination der modalen Dämpfung mit steifigkeitsproportionaler struktureller Dämpfung. Hierfür bestimmt man einen strukturellen Verlustfaktor  $g_{s,s}$ , der für alle anderen Eigenformen  $j \neq h$  gelten soll.

Die durch die modalen Dämpfungsmodellen berücksichtigten  $h$  Eigenformen sind in beiden Fällen nun durch diese Kombination zusätzlich gedämpft. Deren modale Dämpfungsgrade  $D_{gen,h}$  müssen daher für die modale Dämpfung zu  $D_{gen,h,korr}$  jeweils korrigiert werden, damit sie in Kombination mit der zusätzlichen Dämpfung den in  $[D]_{gen}$  bzw.  $[C]_{gen}$  festgelegten Dämpfungsgrad aufweisen.

$$D_{gen,h,korr} = D_{gen,h} - \frac{1}{2}g_{s,v}\omega_{0,h} \quad (2.54a)$$

$$D_{gen,h,korr} = D_{gen,h} - \frac{1}{2}g_{s,s} \quad (2.54b)$$

Die Dämpfungsmatrix bei Kombination von modaler viskoser Dämpfung und steifigkeitsproportionaler viskoser Dämpfung, und die komplexe Systemsteifigkeitsmatrix  $[K^c]$  bei Kombination von modaler struktureller Dämpfung und steifigkeitsproportionaler struktureller Dämpfung ergeben sich damit jeweils zu

$$[D] = g_{s,v}[K] + [M] \left( \sum_1^h \frac{2D_{gen,h,korr}\omega_{0,h}}{m_{gen,h}} \{\phi_h\} \{\phi_h\}^T \right) [M] \quad (2.55a)$$

$$[K^c] = [K] + i \left( g_{s,s}[K] + [M] \left( \sum_1^h \frac{2D_{gen,h,korr}\omega_{0,h}^2}{m_{gen,h}} \{\phi_h\} \{\phi_h\}^T \right) [M] \right) \quad (2.55b)$$

Zwei Mehr-Freiheitsgrad-Systeme, von denen das beide Systeme mit jeweils einer Form der modalen Dämpfung versehen sind, sollen folgende gemeinsame Eigenschaften haben:

- Sie besitzen die gleichen Systemmatrizen  $[M]$  und  $[K]$ .
- Ihre jeweiligen Systemdämpfungsmatrizen  $[D]$  bzw.  $[C]$  wurden mit den gleichen modalen Dämpfungsmaßen  $D_{gen,j}$  gemäß Gl. (2.51) bzw. Gl. (2.53) aufgebaut.

Mit der Annahme eines eingeschwungenen Zustandes, dem entsprechenden Exponentialansatz  $q(t) = \hat{q}e^{i\Omega t}$  und  $\Omega \approx \omega_0$  sind die Formulierungen

$$d_{gen,j}\dot{q}_j(t) = d_{gen,j}i\omega_0q_j(t) = 2D_{gen,j}\omega_{0,j}^2m_{gen,j}iq_j(t) \quad (2.56a)$$

$$ic_{gen,j}q_j(t) = i2D_{gen,j}k_{gen,j}q_j(t) = 2D_{gen,j}\omega_{0,j}^2m_{gen,j}iq_j(t) \quad (2.56b)$$

exakt äquivalent. Somit gilt

$$\begin{aligned} d_{gen,j}\dot{q}_j(t) &\equiv ic_{gen,j}q_j(t) \\ [D]_{gen} \{\dot{q}(t)\} &\equiv i[C]_{gen} \{q(t)\} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Trotz scheinbar unterschiedlicher Dämpfungsformulierung besitzen beide betrachteten Mehr-Freiheitsgrad-Systeme bei harmonischer Anregung das gleiche Systemverhalten.

### 2.3.4. Nichtproportionale Dämpfung

Ist man im Besitz experimentell ermittelter generalisierter Dämpfungsmaße  $D_{gen}$ , können die bisher angeführten Proportionaldämpfungsmodelle alle oder einige dieser Werte exakt in den Eigenformen des FE-Rechenmodells widerspiegeln. Je nach Anzahl der zu berücksichtigenden Dämpfungsmaße gelingt dies durch Auswahl des Dämpfungsmodells und der entsprechenden analytischen Berechnung der Koeffizienten  $g$ .

Oft weisen die experimentell bestimmten Dämpfungsmaße modaler Freiheitsgrade  $D_{gen}$  keine Frequenzabhängigkeit auf, die in sinnvoller Weise durch ein proportionales Dämpfungsmodell ausgedrückt werden kann. In diesem Fall ist es notwendig, eine explizite nichtproportionale Dämpfungsmatrix aufzubauen [10].

Kann die Dämpfung in den Substrukturen einer Gesamtstruktur adäquat jeweils durch ein proportionales Dämpfungsmodell beschrieben werden, führt eine Kopplung der Substruktur-Dämpfungsmatrizen zu einer nichtproportionalen Gesamtsystem-Dämpfungsmatrix. Solch ein Ansatz ist sinnvoll, wenn bspw. modale Eigenschaften der separat getesteten Substrukturen experimentell identifiziert wurden, wie es in dieser Arbeit durchgeführt wird.

Existieren im mechanischen System Elemente aus unterschiedlichen Materialien, welche verschiedene Energiedissipationseigenschaften aufweisen, kann die Dämpfung nicht pauschal als proportional zu Steifigkeits- oder Masseneigenschaften angenommen werden. Eine Abhilfe kann in diesem Fall sein, die Dämpfungseigenschaften einzelner Substrukturen oder Elemente für sich durch unterschiedliche Proportionaldämpfungsmodelle zu beschreiben. Beispielsweise könnten nach [5] verschiedene RAYLEIGH-Koeffizienten  $g_{m,v}$  und  $g_{s,v}$  unterschiedlichen Substrukturen einer Gesamtstruktur zugewiesen werden.

Die  $n$  jeweils proportionalen Dämpfungsmatrizen  $[D]_n$  bzw. komplexen Steifigkeitsmatrizen  $[K^c]_n$  der Substrukturen können dann durch Substrukturkopplung zu einer Gesamtdämpfungsmatrix  $[D]$  bzw. komplexen Gesamtsteifigkeitsmatrix  $[K^c]$  zusammengebaut werden [10].

Existieren im mechanischen System einzelne diskrete viskose Dämpferelemente, deren Dämpfungskonstante  $d$  bekannt sind, müssen diese explizit in die Dämpfungsmatrix  $[D]$  eingebaut werden. Einzelne viskose Dämpfer dürfen wie Federn an Knotenpunkten liegen und werden wie Federn beim Energiegleichgewicht berücksichtigt. Die Systemdämpfungsmatrix  $[D]$  ist dann nichtproportional zu den Systemmatrizen  $[M]$  bzw.  $[K]$  [16].

## 2.4. Lösung des quadratischen Eigenwertproblems bei verschiedenen Dämpfungsmodellierungen

In diesem Abschnitt werden für ungedämpfte und gedämpfte Systeme die Systemmatrizen der Differentialgleichungssysteme charakterisiert, das Eigenwertproblem aufgestellt, Verfahren zur Lösung erklärt, die Eigenschaften der Lösungen des Problems besprochen und die modale

Entkopplung mittels der Orthogonalitätsbeziehungen für diskrete Mehrkörpersysteme erläutert.

### 2.4.1. Direkte Lösung und modale Entkopplung

Das gewöhnliche homogene Differentialgleichungssystem zur Bewegungsbeschreibung diskretisierter Kontinua lautet für das **ungedämpfte System**

$$[M] \{\ddot{u}(t)\} + [K] \{u(t)\} = \{0\} \quad (2.58)$$

$[M]$ ,  $[K] \in \mathbb{R}$  sind beide symmetrisch,  $[M] = [M]^\top$  und  $[K] = [K]^\top$ . Sie sind immer symmetrisch, wenn elastische Rückstellkräfte und damit die Bewegungsgleichungen in Richtung der unbekannten Verschiebungen  $u_{Elm}$  formuliert werden. Dies ist in aller Regel der Fall, auch in FEM-Programmen [16].

$[M]$  und  $[K]$  sind positiv definit, wenn es sich um eine stabile Struktur handelt. Eine Matrix ist positiv definit, wenn die Matrix quadratisch ist und für sie gilt

$$\langle u \rangle [M] \{u\} > 0 \quad (2.59)$$

für einen beliebigen Vektor  $\{u\}$ , der kein Nullvektor ist. Wenn  $[M]$  regulär ist, wenn also zu jedem Freiheitsgrad eine Masse existiert und somit kein Nullreih in der Matrix steht, ist dies bereits erfüllt [6]. Gilt  $\langle u \rangle [M] \{u\} \geq 0$ , sind Starrkörperbewegungen aufgrund eingepprägter Kräfte möglich und die Matrix  $[M]$  deshalb nur positiv semidefinit [5].

$[M]$  ist nur in der Hauptdiagonalen besetzt, wenn Massen nur in den Knotenpunkten konzentriert sind. Andernfalls, wenn die Elemente eine regelmäßige Massenbelegung besitzen, sind auch die Nebendiagonalen von  $[M]$  belegt. Diese Massenkopplung führt zu einem deutlich erhöhten Berechnungsaufwand, dafür aber zu etwas genaueren Ergebnissen [10].

Die Lösung von Gl. (2.58) erfolgt in Anlehnung an den Produktansatz von BERNOULLI Gl. (2.2) und das Superpositionsprinzip in Gl. (2.6) mit dem Ansatz

$$u(t) = \sum_1^n \{\phi_n\} \hat{u}_n e^{\lambda_n t} \quad (2.60)$$

mit  $n$  Freiheitsgraden, dem Eigenvektor  $\{\phi_n\}$ , der modalen Amplitude  $\hat{u}_n$  und  $\lambda_n$ . Setzt man den Ansatz in Gl. (2.58) ein, ergibt sich das homogene, algebraische Gleichungssystem

$$\left( \lambda_n^2 [M] + [K] \right) \{\phi_n\} = \{0\} \quad (2.61)$$

Das Gleichungssystem hat nun die Form eines quadratischen Eigenwertproblems und hat nur eine Lösung, wenn gilt

$$\det \left( \lambda_n^2 [M] + [K] \right) = \{0\} \quad (2.62)$$

Das System hat bei  $n$  Freiheitsgraden  $n$  komplex konjugierte Paare imaginärer Eigenwerte  $\lambda_{n1/n2}$  der Form  $\lambda_{n1/n2} = \pm i\omega_{0,n}$ . Durch Einsetzen einer der beiden Eigenwerte  $\lambda_{n1}$  oder

$\lambda_{n2}$  in Gl. (2.61) können die zu den Paaren gehörigen, beliebig normierbaren  $n$  Eigenvektoren  $\{\phi_n\} \in \mathbb{R}$  berechnet werden [16].

Ist der  $k$ -te Eigenwert  $\lambda_k = 0$ , sodass die Eigenkreisfrequenz  $\omega_{0,k} = 0\text{Hz}$  ist, so bedeutet dies für Gl. (2.61), dass gilt

$$[K] \{\phi_k\} \stackrel{!}{=} \{0\} \quad (2.63)$$

Ein entsprechender Eigenvektor  $\{\phi_k\} \neq \{0\}$  existiert nur dann, wenn die Struktur zumindest teilweise ungefesselt ist und sie sich spannungsfrei im Raum als Starrkörper bewegen kann. Dieser Eigenvektor  $\{\phi_k\}$  wird auch Starrkörperverschiebungszustand genannt [16].

In FE-Programmen werden iterative Methoden zur Lösung des Eigenwertproblems insbesondere bei der dynamischen Analyse großer Systemen angewandt [6]. Weit verbreitet sind die LAN-CZOS-Methode, die besonders für mittlere und große Matrizen geeignet ist, Eigenwerte und Eigenvektoren mit hoher Genauigkeit und Effizienz berechnet und bspw. in MSC.NASTRAN umgesetzt ist. Verbreitet ist auch das ARNOLDI-Verfahren, das für große, spärlich besetzte Matrizen geeignet ist bspw. in MATLAB verwendet wird. Die Berechnungen werden oft durch die Methode der STURM'schen Reihe gefolgt, die überprüft, dass alle Eigenwerte bis zu einer spezifizierten Frequenz gefunden wurden [41].

Sind die Eigenvektoren des Systems bekannt, kann auch für das diskretisierte System Gl. (2.58) eine modale Zerlegung wie in Kap. 2.1 durchgeführt werden. Dies geht aber nur, wenn Orthogonalitätsbeziehungen auch in diesem Fall gelten.

Mit den errechneten Eigenkreisfrequenzen und Eigenvektoren der  $j$ -ten und  $k$ -ten Eigenform lautet die Massenorthogonalitätsrelation, wenn man voraussetzt, dass alle Eigenkreisfrequenzen unterschiedlich sind

$$\langle \phi_j \rangle [M] \{\phi_k\} = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k \\ m_{gen,j} \neq 0 & \text{für } j = k \end{cases} \quad (2.64)$$

Die Steifigkeitsorthogonalitätsrelation ergibt sich zu

$$\langle \phi_j \rangle [K] \{\phi_k\} = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k \\ k_{gen,j} \neq 0 & \text{für } j = k \end{cases} \quad (2.65)$$

Die Entkopplung gelingt, indem man den zeitabhängigen Verschiebungszustand  $\{u\}$  wie beim Kontinuum in Kap. 2.1 durch eine Linearkombination aller  $n$  Eigenformen des diskretisierten Systems  $\{\phi_n\}$  ausdrückt. Die Modalmatrix  $[\Phi]$

$$[\Phi] = [\{\phi_1\} \quad \{\phi_2\} \quad \cdots \quad \{\phi_n\}] \quad (2.66)$$

besteht dann aus  $n$  linear unabhängigen Vektoren und ist regulär und invertierbar, wenn alle Eigenvektoren darin enthalten sind. Mit ihr wird der zeitabhängige Verschiebungsvektor  $u$  ausgedrückt durch

$$\{u(t)\} = [\Phi] \{q(t)\} \quad (2.67)$$

wobei  $\{q(t)\}$  keine Ortsinformationen mehr enthält.  $\{q(t)\}$  wird auch Vektor der generalisierten Koordinaten genannt. Setzt man diesen Ausdruck in die Systemgleichung Gl. (2.58) ein und multipliziert sie von links mit der transponierten Modalmatrix  $[\Phi]^T$ , erhält man

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \{\ddot{q}(t)\} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \{q(t)\} = \{0\} \quad (2.68)$$

$$[M]_{gen} \{\ddot{q}(t)\} + [K]_{gen} \{q(t)\} = \{0\} \quad (2.69)$$

Dank der Orthogonalitätsrelationen können die Systemmatrizen  $[K]$  und  $[M]$  in die Formen  $[K]_{gen}$  und  $[M]_{gen}$  transformiert werden, die nur in der Hauptdiagonalen besetzt sind mit den generalisierten Steifigkeiten  $k_{gen,n}$  bzw. generalisierten Massen  $m_{gen,n}$ . Das Gleichungssystem Gl. (2.69) ist somit modal entkoppelt [16].

In vielen Rechenprogrammen zur Berechnung der Strukturodynamik werden die reellen Eigenvektoren  $\{\phi_n\}$  normalisiert ausgegeben. In den meisten Fällen erfüllen sie in normalisierter Form die Massenorthogonalitätsrelation in der Weise, dass

$$\langle \phi_{n,norm} \rangle [M] \{\phi_{n,norm}\} = m_{gen,norm} = 1 \quad (2.70)$$

gilt. Um diese Normalisierung durchzuführen, wird zuerst der skalare Koeffizient  $m_{gen}$

$$\langle \phi_n \rangle [M] \{\phi_n\} = m_{gen} \quad (2.71)$$

berechnet. Die normalisierten Eigenvektoren ergeben sich dann durch

$$\{\phi_{n,norm}\} = \frac{\{\phi_n\}}{\sqrt{m_{gen}}} \quad (2.72)$$

Sind alle  $n$  Eigenformen auf diese Weise normalisiert, werden sie als orthonormal zur Massenmatrix bezeichnet [6].

Ein **allgemein viskos gedämpftes System** besitzt die diskretisierte Bewegungsdifferentialgleichung

$$[M] \{\ddot{u}(t)\} + [D] \{\dot{u}(t)\} + [K] \{u(t)\} = \{0\} \quad (2.73)$$

Symmetrie der Matrizen  $[M]$  und  $[K]$  ist weiterhin vorhanden. Symmetrie und positive Definitheit der Dämpfungsmatrix  $[D] \in \mathbb{R}$  sind im allgemeinen Fall nicht gegeben, aber für ein übliches, mit der FEM aufgebautes mechanisches Modell vorhanden. Symmetrie und positive Definitheit von  $[D]$  sind Voraussetzung für den folgenden Lösungsweg [16][25].

Die Hinzunahme einer Dämpfungsmatrix  $[D]$  bewirkt einen deutlichen Anstieg der Rechenzeit und des benötigten Speichers, besonders wenn  $[D]$  keine Bandstruktur besitzt [5].

Für eine analytische Lösung muss das Problem Gl. (2.73) in den Zustandsraum überführt werden. Dazu muss eine Ordnungsreduktion des Differentialgleichungssystems 2. Ordnung in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung mit doppelt so vielen Gleichungen stattfinden. Dann erhält man ein Gleichungssystem mit den Systemmatrizen  $[A]$  und  $[B]$ .

Dieses Gleichungssystem kann unterschiedliche Formen haben [23][41].

$$\begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}(t)\} \\ \{\dot{u}(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [M]^{-1}[D] & [M]^{-1}[K] \\ -[I] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}(t)\} \\ \{u(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (2.74)$$

Die Form Gl. (2.74) hat den Nachteil, dass  $[M]$  invertiert werden und damit regulär sein muss. Eine Invertierung von Matrizen ist außerdem extrem rechenintensiv, sodass diese Form nur für Systeme mit Freiheitsgraden kleiner oder reduzierter Anzahl empfohlen ist.

Die folgenden drei Formen

$$\begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}(t)\} \\ \{\dot{u}(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [-M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}(t)\} \\ \{u(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (2.75a)$$

$$\begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}(t)\} \\ \{\dot{u}(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [D] & [K] \\ [-I] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}(t)\} \\ \{u(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (2.75b)$$

$$\begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [-K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}(t)\} \\ \{\dot{u}(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [D] & [K] \\ [K] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}(t)\} \\ \{u(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (2.75c)$$

mit der Identität  $[M]\dot{u}(t) - [M]\dot{u}(t) = \{0\}$ ,  $[K]\dot{u}(t) - [K]\dot{u}(t) = \{0\}$  bzw.  $[I]\dot{u}(t) - [I]\dot{u}(t) = \{0\}$  werden Begleitformen genannt. Ihre numerische Stabilität sind besonders von der Konditionszahl der Systemmatrizen abhängig, welche bei Bedarf skaliert werden können [23]. Abgekürzt lauten alle vier Formen

$$[A] \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}(t)\} \\ \{\dot{u}(t)\} \end{Bmatrix} + [B] \begin{Bmatrix} \{\dot{u}(t)\} \\ \{u(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (2.76)$$

Mit dem Ansatz

$$u(t) = \sum_1^{2n} \{\psi_n\} \hat{u}_n e^{\lambda_n t} \quad (2.77)$$

mit  $n$  Freiheitsgraden ergibt sich das Eigenwertproblem

$$(\lambda_n [A] + [B]) \begin{Bmatrix} \lambda_n \{\psi_n\} \\ \{\psi_n\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (2.78)$$

Die Lösung des Eigenwertproblems führt auf  $n$  Paare komplex konjugierter Eigenwerte  $\lambda_n$  mit  $\lambda_{n1/n2} = -\delta_n \pm i\omega_n$  und  $n$  Paare komplex konjugierter, beliebig normierbarer Eigenvektoren  $\{\psi_n\}$ .

Eine Komplexität der Eigenvektoren bedeutet bildlich, dass bei einer zeitlichen Darstellung der Eigenform jeder Freiheitsgrad sein Betragsmaximum zu einem unterschiedlichen Zeitpunkt, also mit einem Phasenversatz, erreicht und die Eigenform eine laufende Welle darstellt [24].  $\Re(\{\psi_n\})$  ist im Allgemeinen nicht proportional zu  $\Im(\{\psi_n\})$ , sodass jeder  $k$ -te Freiheitsgrad einer  $n$ -ten Eigenform einen unterschiedlichen Phasenversatz  $\varphi_{n,k}$  besitzt [25].

$$\tan \varphi_{n,k} = -\frac{\Im(\psi_{n,k})}{\Re(\psi_{n,k})} \quad (2.79)$$

Eine Entkopplung der Bewegungsgleichungen gelingt, indem man mit der Modalmatrix  $\Psi$

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \{\psi_1\} & \lambda_2 \{\psi_2\} & \cdots & \lambda_{2n} \{\psi_{2n}\} \\ \{\psi_1\} & \{\psi_2\} & \cdots & \{\psi_{2n}\} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

den zeitabhängigen Verschiebungsvektor ausdrückt durch

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{u}(t)\} \\ \{u(t)\} \end{Bmatrix} = [\Psi] \{q(t)\} \quad (2.81)$$

Durch Einsetzen dieses Ansatzes in Gl. (2.76) ergibt sich

$$[\Psi]^T [A] [\Psi] \{\dot{q}(t)\} + [\Psi]^T [B] [\Psi] \{q(t)\} = \{0\} \quad (2.82)$$

$$[A]_{gen} \{\dot{q}(t)\} + [B]_{gen} \{q(t)\} = \{0\} \quad (2.83)$$

$[A]_{gen}$  und  $[B]_{gen}$  haben beide Diagonalform, sodass das Gleichungssystem aus vollständig entkoppelten, gewöhnlichen Bewegungsdifferentialgleichungen 1. Ordnung

$$a_{gen,n} \dot{q}_n(t) + b_{gen,n} q_n(t) = 0 \quad (2.84)$$

besteht. Diese Transformation beruht auf den Orthogonalitätsrelationen gedämpfter Systeme

$$\langle \lambda_j \langle \psi_j | \langle \psi_j | \rangle [A] \begin{Bmatrix} \lambda_k \{\psi_k\} \\ \{\psi_k\} \end{Bmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k \\ a_{gen,j} \neq 0 & \text{für } j = k \end{cases} \quad (2.85)$$

$$\langle \lambda_j \langle \psi_j | \langle \psi_j | \rangle [B] \begin{Bmatrix} \lambda_k \{\psi_k\} \\ \{\psi_k\} \end{Bmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k \\ b_{gen,j} \neq 0 & \text{für } j = k \end{cases} \quad (2.86)$$

mit  $a_{gen,j}$  generalisiertes oder modales  $a$  und  $b_{gen,j}$  generalisiertes oder modales  $b$  der  $j$ -ten Eigenform [16].

$a_{gen}$  stellt Dämpfung und Masse gewichtet mit der komplexen Eigenform dar.  $b_{gen}$  stellt Steifigkeit und Masse gewichtet mit der komplexen Eigenform dar. Mit ihrer Kenntnis ergibt sich der  $k$ -te Eigenwert  $\lambda_k$  der  $k$ -ten komplexen Eigenform  $\{\psi_k\}$ .

$$\lambda_k = -\frac{b_{gen,n}}{a_{gen,n}} \quad (2.87)$$

**Allgemein strukturell gedämpfte Systeme** können als Teil des homogenen Bewegungsdifferentialgleichungssystems

$$[M] \{\ddot{u}(t)\} + [K^c] \{u(t)\} = \{0\} \quad (2.88)$$

mit  $[K^c] \in \mathbb{C}$  untersucht werden, obwohl strukturelle Dämpfung, wie in Kap. 2.3.2 ausgeführt, streng genommen nur ein Modell für harmonische Schwingungen ist [25].

Wie beim ungedämpften System wird der Exponentialansatz Gl. (2.60) gemacht, der zum komplexen allgemeinen Eigenwertproblem

$$(\lambda_n^2 [M] + [K^c]) \{\psi_n\} = \{0\} \quad (2.89)$$



führt. Die Eigenschaft  $[K^c] \in \mathbb{C}$  bedingt, dass für die Eigenwertprodukte  $\lambda_n^2 \in \mathbb{C}$  gilt und gemäß der Bedingung von Symmetrie und positiver Definitheit aller Systemmatrizen  $\Re(\lambda_n^2)$  und  $\Im(\lambda_n^2)$  positiv sind. Für die  $n$  komplexen Paare  $\lambda_n$  gilt

$$\lambda_{n,1/2} = \pm i\omega_{0,n} \sqrt{1 + ig_n} \quad (2.90)$$

Mit den Eigenwertpaaren lassen sich die Eigenvektoren  $\{\psi_n\}$  berechnen. Zu jedem Eigenwertpaar gehört ein einziger komplexer Eigenvektor, der nicht komplex konjugiert auftritt [25].

Dieses Eigenwertproblem mit komplexer Steifigkeitsmatrix kann numerisch instabil sein. Es gibt leider keine Veröffentlichungen, die geeignete Skalierungen vorschlagen.

## 2.4.2. Modale Lösung

Die modale Lösung wird gerne zur Lösung der Eigenwertproblem großer, proportional und nichtproportional gedämpfter Systeme der Form Gl. (2.73) bzw. Gl. (2.88) verwendet. Sie nimmt als Ausgangspunkt die direkte Lösung des Eigenwertproblems des ungedämpften Nachbarsystems Gl. (2.58), welche  $n$  imaginäre Eigenwertpaare  $\lambda_{n1/n2} = \pm i\omega_{0,n}$  und  $n$  entsprechende Eigenvektoren  $\{\phi_n\} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  bei  $m$  Freiheitsgraden liefern kann.

### • Modale Superposition

Sind alle  $n$  Eigenvektoren des ungedämpften Systems bekannt, kann mit ihnen eine vollständige Modalmatrix  $[\Phi] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  erstellt werden.

Durch Einsetzen des Ansatzes Gl. (2.67) in Gl. (2.73) bzw. in Gl. (2.88) und der Multiplikation der Systemmatrizen von links mit  $[\Phi]^T$  erhält man

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \{\ddot{q}(t)\} + [\Phi]^T [D] [\Phi] \{\dot{q}(t)\} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \{q(t)\} = \{0\} \quad (2.91)$$

$$[M]_{gen} \{\ddot{q}(t)\} + [D]_{gen} \{\dot{q}(t)\} + [K]_{gen} \{q(t)\} = \{0\} \quad (2.92)$$

bzw.

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \{\ddot{q}(t)\} + [\Phi]^T [K^c] [\Phi] \{q(t)\} = \{0\} \quad (2.93)$$

$$[M]_{gen} \{\ddot{q}(t)\} + [K^c]_{gen} \{q(t)\} = \{0\} \quad (2.94)$$

$[K]_{gen}$  und  $[M]_{gen}$  haben aufgrund der Orthogonalitätsbedingungen Diagonalform [16].

Modelliert man Dämpfung mittels eines proportionalen Dämpfungsmodells, stellt  $[D]$  bzw.  $[K^c]$  lediglich eine Linearkombination von  $[K]$  und  $[M]$  dar, zu denen die Eigenformen  $\{\phi_n\}$  orthogonal sind, und somit hat in diesem Fall auch  $[D]_{gen}$  bzw.  $[K^c]_{gen}$  Diagonalform. Die Hauptdiagonale von  $[D]_{gen}$  bzw.  $[K^c]_{gen}$  ist dabei mit der generalisierten Dämpfung  $d_{gen,n}$  bzw. der generalisierten komplexen Steifigkeit  $k_{gen}^c = k_{gen} + ic_{gen}$  besetzt [16].

Das proportional gedämpfte diskretisierte Bewegungsdifferentialgleichungssystem lässt sich

demnach wie beim Kontinuum in Kap. 2.3 in  $n$  gewöhnliche entkoppelte Differentialgleichungen der Form

$$m_{gen,n}\ddot{q}_n(t) + d_{gen,n}\dot{q}_n(t) + k_{gen,n}q_n(t) = 0 \quad (2.95)$$

bzw.

$$m_{gen,n}\ddot{q}_n(t) + k_{gen,n}^c q_n(t) = 0 \quad (2.96)$$

überführen.

Eine Lösung des entkoppelten Systems, bspw. mittels Gl. (2.75a), führt zu einem neuen Satz an  $n$  imaginären Eigenwertpaaren  $\lambda_{n1/n2} = \pm i\omega_n$  und im Falle viskoser Dämpfung zu  $n$  Paaren komplex konjugierter generalisierter Eigenvektoren  $\{\hat{q}_{2n}\}$

$$\{\hat{q}_{2n}\} = \left\{ \begin{array}{c} \hat{q}_n \\ \lambda_n \hat{q}_n \end{array} \right\} \quad (2.97)$$

bzw. im Falle von struktureller Dämpfung zu Vektoren  $\{\hat{q}_n\}$  mit  $\hat{q}_n \in \mathbb{R}$ . Eine Umrechnung in die Eigenvektoren erfolgt mittels des Transformationsansatzes Gl. (2.67), sodass für viskose Dämpfung

$$\left[ \begin{array}{cc} \{\phi_n\} & \{\phi_n\} \\ \lambda_{n,1} \{\phi_n\} & \lambda_{n,2} \{\phi_n\} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} [\Phi]\hat{q}_n & [\Phi]\hat{q}_n^* \\ [\Phi]\lambda_{n,1}\hat{q}_n & [\Phi]\lambda_{n,2}\hat{q}_n^* \end{array} \right] \quad (2.98)$$

gilt und für strukturelle Dämpfung  $\{\phi_n\} = [\Phi]\hat{q}_n$  gilt.

Die Eigenvektoren  $\{\phi_n\} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  des gedämpften Systems stimmen mit den Eigenvektoren  $\{\phi_n\}$  des ungedämpften Nachbarsystems überein. Die Eigenwerte und Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems sowie der modale Dämpfungsgrad  $D_{gen,n}$  und die proportionalen Verlustfaktoren  $g$  lassen sich anhand Gl. (2.95) mittels der Beziehungen des gedämpften Ein-Freiheitsgrad-Systems leicht berechnen. Der Betrag und die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz  $\omega_{0,n}$  von ursprünglich und neu bestimmtem Eigenwert  $\lambda_n$  stimmen überein.[16].

Folgt das Dämpfungsmodell keinem Proportionalmodell, ist  $[D]_{gen}$  bzw.  $[C]_{gen}$  in  $[K^c]_{gen} = [K]_{gen} + i[C]_{gen}$  voll besetzt. Das bedeutet, dass alle  $n$  Eigenformen und deren modale Eigenschaften durch die generalisierten Koordinaten anderer Eigenformen untereinander gekoppelt sind. Das System ist durch die angewandte Transformation also nicht entkoppelt und der modale Ansatz Gl. (2.67) hat keine Vereinfachung des Bewegungsdifferentialgleichungssystems bewirkt [10].

Die Lösung des transformierten Systems liefert in diesem Fall komplex konjugierte Eigenwerte  $\lambda_n$  sowie generalisierte Eigenvektoren  $\{\hat{q}_{2n}\}$  bzw.  $\{\hat{q}_n\}$  mit  $\hat{q}_n \in \mathbb{C}$ . Mit ihnen erfolgt die Umrechnung in die Eigenvektoren  $\{\psi\}_n$  des gedämpften Systems, im Falle von viskoser Dämpfung mit

$$\left[ \begin{array}{cc} \{\psi_n\} & \{\psi_n^*\} \\ \lambda_{n,1} \{\psi_n\} & \lambda_{n,2} \{\psi_n^*\} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} [\Phi]\hat{q}_n & [\Phi]\hat{q}_n^* \\ [\Phi]\lambda_{n,1}\hat{q}_n & [\Phi]\lambda_{n,2}\hat{q}_n^* \end{array} \right] \quad (2.99)$$

und im Falle von struktureller Dämpfung mit  $\{\psi_n\} = [\Phi]\hat{q}_n$ . Die Eigenvektoren  $\{\psi_n\} \in \mathbb{C}$  stimmen nicht mit den Eigenvektoren  $\{\phi_n\} \in \mathbb{R}$  des ungedämpften Nachbarsystems überein.

Eine Näherungslösung bei nichtproportionaler Dämpfung kann dadurch gewonnen werden, dass die Terme in den Nebendiagonalen von  $[D]_{gen}$  bzw.  $[C]_{gen}$  bei Systemen mit allgemein schwacher Dämpfung als klein angenommen und zu 0 gesetzt werden. Dadurch ist das transformierte Bewegungsdifferentialgleichungssystem künstlich entkoppelt und kann einfacher gelöst werden. Dieses Vorgehen wird durch eine schwache Kopplung von dämpfungsbehafteten Freiheitsgraden gerechtfertigt und wird auch Bequemlichkeitshypothese genannt [10].

### • Modale Reduktion/Kondensation

Wie bei der Lösung des Eigenwertproblems großer FE-Systeme üblich, erhält man oft nur eine begrenzte Anzahl  $h$  imaginärer Eigenwertpaare  $\lambda_{h1/h2} = \pm i\omega_{0,h}$  und  $h$  entsprechender reelle Eigenvektoren  $\{\phi_h\}$ . Die untersten Eigenfrequenzen und Eigenformen werden am besten durch das FE-Rechenmodell vorhergesagt, während höhere Eigenformen nur wenig Übereinstimmung mit der Realität aufweisen.

Die  $h < n$  Eigenvektoren  $\{\phi_h\}$  der Länge  $m$  können nun wiederum genutzt werden, eine Modalmatrix  $[\Phi]_{red} \in \mathbb{R}^{m \times h}$  zusammenzubauen. Mit der verkürzten Modalmatrix  $[\Phi]_{red}$  des konservativen Hilfsystems

$$[\Phi]_{red} = [\{\phi_1\} \quad \{\phi_2\} \quad \cdots \quad \{\phi_h\}] \quad (2.100)$$

wird der zeitabhängige Verschiebungsvektor  $u$  durch eine kleinere Anzahl  $h < m$  Eigenformen

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{Bmatrix} = [\Phi]_{red} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_h(t) \end{Bmatrix} \quad (2.101)$$

ausgedrückt. Einsetzen dieses Ausdrucks in Gl. (2.73) bzw. Gl. (2.88) ergibt

$$[\Phi]_{red}^T [M] [\Phi]_{red} \{\ddot{q}(t)\} + [\Phi]_{red}^T [D] [\Phi]_{red} \{\dot{q}(t)\} + [\Phi]_{red}^T [K] [\Phi]_{red} \{q(t)\} = \{0\} \quad (2.102)$$

$$[M]_{gen} \{\ddot{q}(t)\} + [D]_{gen} \{\dot{q}(t)\} + [K]_{gen} \{q(t)\} = \{0\} \quad (2.103)$$

bzw.

$$[\Phi]_{red}^T [M] [\Phi]_{red} \{\ddot{q}(t)\} + [\Phi]_{red}^T [K^c] [\Phi]_{red} \{q(t)\} = \{0\} \quad (2.104)$$

$$[M]_{gen} \{\ddot{q}(t)\} + [K^c]_{gen} \{q(t)\} = \{0\} \quad (2.105)$$

Das Differentialgleichungssystem Gl. (2.103) bzw. Gl. (2.105) besteht aufgrund der Transformation aus nur noch  $h < m$  Differentialgleichungen und besitzt  $h < m$  generalisierte Freiheitsgrade. Die transformierten Matrizen  $[K]_{gen}$  und  $[M]_{gen}$  haben aufgrund der Orthogonalitätsbedingungen Diagonalform, bei Proportionaldämpfung auch  $[D]_{gen}$  bzw.  $[C]_{gen}$ . Dann besteht das Differentialgleichungssystem Gl. (2.103) aus einer reduzierten Anzahl  $h < m$  gewöhnlicher Differentialgleichungen. Diese sind entkoppelt, sodass andere Eigenformen  $j \neq h$

keinen Einfluss auf die Schwingungseigenschaften der betrachteten Eigenformen  $j = h$  nehmen [16].

Der Ansatz Gl. (2.101), den Verschiebungsvektor nur durch eine begrenzte Anzahl von Eigenformen auszudrücken, ist also in diesem Fall gerechtfertigt. Dann stimmen die Beträge und die ungedämpften Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{0,h}$  der ursprünglich und neu aus Gl. (2.103) bestimmten Eigenwerten  $\lambda_h$  überein.

Ist das Modell nicht proportional gedämpft, ist  $[D]_{gen}$  bzw.  $[C]_{gen}$  voll besetzt. Das bedeutet, dass jede der  $m$  Eigenformen mit ihren modalen Eigenschaften durch die generalisierten Koordinaten aller anderen Eigenformen mit ihnen verkoppelt ist und alle  $m$  generalisierten Koordinaten in allen ausgeschriebenen Gleichungen von Gl. (2.103) auftreten. Da mit dem Ansatz Gl. (2.101) der Verschiebungsvektor allerdings nur durch  $h < m$  Eigenformen ausgedrückt wurde, fehlen in den ausgeschriebenen Gleichungen von Gl. (2.103) die eigentlich vorhandenen Koppelterme von Eigenformen  $j \neq h$ , die die Schwingungseigenschaften der betrachteten Eigenformen  $j = h$  beeinflussen [16].

Die folgende Gleichung stellt diesen Sachverhalt am Beispiel eines beliebigen nichtproportional viskos gedämpften, transformierten Systems mit  $m = 3$  und  $h = 2$  dar.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \\ \ddot{q}_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{Bmatrix} + \\
 \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \ddot{q}_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.106)
 \end{aligned}$$

Modale Eigenschaften, die durch Lösung dieses transformierten Gleichungssystems bestimmt werden, sind also fehlerbehaftet.  $|\Im(\lambda)|$  ist zu klein, während  $|\Re(\lambda)|$  zu groß ist. Der Ansatz Gl. (2.103) ist daher streng genommen nicht gerechtfertigt und die modale Vorgehensweise liefert keine korrekte Lösung.

Trotzdem kann die modale Reduktion für schwach und mäßig gedämpfte Probleme aber in effizienter Weise eine Näherungslösung liefern. Sie liefert mit einer wachsenden Anzahl  $h$  berücksichtigter Eigenformen umso bessere Ergebnisse. Sie erfordert wenig Organisationsaufwand und erfordert eine geringere Rechenzeit und geringeren Speicherbedarf [16][41].

## 3. Theorie zur Experimentellen Modalanalyse

Dieses Kapitel erläutert vor Beginn der Untersuchung die relevanten theoretischen Grundlagen zur experimentellen Modalanalyse. Es legt dabei einen besonderen Schwerpunkt auf die mathematischen Algorithmen, die eine hohe Präzision bei der Errechnung von Frequenzgangsfunktionen aus den gemessenen Zeitantworten einer Struktur sowie eine möglichst genaue nicht-parametrische Identifikation der modalen Eigenschaften ermöglichen.

### 3.1. Grundlagen

Unter einer experimentellen Modalanalyse versteht man die experimentelle Bestimmung modaler Eigenschaften einer mechanischen Struktur. Sie basiert auf umfangreichen Vibrationsmessungen einer Struktur und ermöglicht durch eine angemessene Verarbeitung der Daten eine mathematische Formulierung durch ein modales Modell zur Beschreibung des Vibrationsverhaltens innerhalb eines festgelegten Frequenzbereichs [12].

Die experimentelle Modalanalyse bedient sich zweier unterschiedlicher Verfahren. Abhängig vom gewählten Verfahren setzt sie eine gewisse Instrumentierung und Verarbeitungsprozedur voraus [25].

Das Phasenresonanzverfahren beruht auf der gleichzeitigen harmonischen Erregung an mehreren Punkten der Struktur mit einer manuell einstellbaren Erregerkreisfrequenz  $\Omega = \text{const}$  und einer Erregerkraftamplitude  $\hat{F}$ . Es zielt dadurch ab, dass die Struktur bei Resonanz einer Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  mit genau einer Eigenschwingungsform  $\{\psi\}$  antwortet, deren Amplituden dann proportional zum Eigenvektor sind. [25].

Das Phasentrennungsverfahren hingegen beruht auf der Erregung der Struktur mit nicht angepassten Kräften, bspw. Impulsen und anderen nichtharmonischen Anregungen, sodass gleichzeitig mehrere Eigenkreisfrequenzen und Eigenschwingungsformen in einem Frequenzbereich angeregt werden [25].

Eine verbreitete Methode der Phasentrennung sind Frequenzbereichsverfahren. Sie beruhen auf der Messung der an den Freiheitsgraden  $j$  gemessenen Erregung  $f_j(t)$  und der an den Freiheitsgraden  $k$  gemessenen Antwortschwingung  $u_k(t)$  der Struktur. Sie transformiert die gemessenen Zeitdaten von Antwort  $u_k(t)$  und Erregung  $f_j(t)$  der Struktur mittels FOURIER-

Transformation in FOURIER-Spektren  $U_k(\Omega)$  und  $F_j(\Omega)$ , bestimmt daraus die Frequenzgänge  $H_{jk}(\Omega) = U_j(\Omega)/F_k(\Omega)$  und nimmt sie als Grundlage für die Identifikation der modalen Parameter [12][25].

Die mathematische Beschreibung mittels Frequenzgängen kann hergeleitet werden, wenn man sich der allgemeinen diskretisierten Bewegungsdifferentialgleichung eines mit einer beliebigen Frequenz  $\Omega$  harmonisch angeregten Mehr-Freiheitsgrad-Systems mit  $n$  Freiheitsgraden bedient.

$$[M] \{\ddot{u}(t)\} + [D] \{\dot{u}(t)\} + [K] \{u(t)\} = \{f(t)\} \quad (3.1)$$

Mit der Annahme, dass sich das System im eingeschwungenen Zustand befindet, macht man den Exponentialansatz  $\{u(t)\} = \{\hat{u}\} e^{i\Omega t}$  für den Antwortvektor bzw.  $\{f(t)\} = \{\hat{F}\} e^{i\Omega t}$  für den Erregervektor, sodass gilt

$$\left(-\Omega^2 [M] + i\Omega [D] + [K]\right) \{\hat{u}\} = \{\hat{F}\} \quad (3.2)$$

$$\{\hat{u}\} = \left(-\Omega^2 [M] + i\Omega [D] + [K]\right)^{-1} \{\hat{F}\} \equiv [H(\Omega)] \{\hat{F}\} \quad (3.3)$$

Die eingeführte Matrixfunktion  $[H(\Omega)] \in \mathbb{C}^{n \times n}$  in Gl. (3.3) stellt das Verhältnis von Ausgang zu Eingang des physikalischen Systems als Reaktion auf harmonische Eingangsschwingungen unterschiedlicher Kreisfrequenzen  $\Omega$  dar und wird als Frequenzgang bezeichnet.

Sind die diskreten reellen, unnormierten Eigenformen des ungedämpften Systems bekannt, kann man die Modalmatrix  $[\Phi]$  des Mehr-Freiheitsgrad-Systems aufbauen und zur Lineartransformation nutzen.

$$[\Phi]^T [H(\Omega)] [\Phi]^{-1} = [\Phi]^T \left(-\Omega^2 [M] + i\Omega [D] + [K]\right)^{-1} [\Phi]^{-1} \quad (3.4)$$

Gemäß der Orthogonalitätsbedingungen in Gl. (2.64) und in Gl. (2.65) für diskrete Mehr-Freiheitsgrad-Systeme und unter der Annahme proportionaler viskoser Dämpfung lässt sich das System vollständig modal entkoppeln und somit alle Systemmatrizen diagonalisieren.

$$[\Phi]^T [H(\Omega)] [\Phi]^{-1} = \left(-\Omega^2 [M]_{gen} + i\Omega [D]_{gen} + [K]_{gen}\right)^{-1} \quad (3.5)$$

Für die Frequenzgangsmatrix  $[H(\Omega)]$  kann man mithilfe der Beziehungen des Ein-Freiheitsgrad-Systems aus Kap. 2.3 daraus entwickeln

$$[H(\Omega)] = \sum_1^n [H(\Omega)]_n = \sum_1^n \frac{\{\phi_n\} \{\phi_n\}^T}{-\Omega^2 m_{gen,n} + i\Omega d_{gen,n} + k_{gen,n}} \quad (3.6)$$

$$[H(\Omega)] = \sum_1^n \frac{\{\phi_n\} \{\phi_n\}^T m_{gen}^{-1}}{\omega_{0,n}^2 - \Omega^2 + i2D_{gen,n}\omega_{0,n}\Omega} \quad (3.7)$$

Die jeweilige Multiplikation der Eigenvektoren  $\{\phi_n\}$  mit  $m_{gen,n}^{-\frac{1}{2}}$  stellt lediglich eine Normierung der  $n$ -ten Eigenvektoren auf die jeweilige  $n$ -te generalisierte Masse  $m_{gen,n}$  gemäß Gl. (2.72) dar.

$$[H(\Omega)] = \sum_1^n \frac{\{\phi_{n,norm}\} \{\phi_{n,norm}\}^T}{\omega_{0,n}^2 - \Omega^2 + i2D_{gen,n}\omega_{0,n}\Omega} \quad (3.8)$$

Für ein einzelnes Element  $H_{jk}(\Omega)$  der Frequenzgangsmatrix  $[H]$  ergibt sich dann die partikuläre Lösung

$$H_{jk}(\Omega) = \sum_1^n \frac{\phi_{n,norm,j} \phi_{n,norm,k}}{\omega_{0,n}^2 - \Omega^2 + i2D_{gen,n}\omega_{0,n}\Omega} \quad (3.9)$$

Führt man die LAPLACE-Variable  $s = i\Omega$  und den Eigenwert gemäß Gl. (2.29) ein, kann man schreiben

$$H_{jk}(\Omega) = \sum_1^n \frac{\phi_{n,norm,j} \phi_{n,norm,k}}{(s - \lambda_n)(s - \lambda_n^*)} \quad (3.10)$$

Für den Zähler  $\phi_{n,norm,j} \phi_{n,norm,k} \in \mathbb{R}$  der Funktion  $H_{jk}(\Omega)$  wird  $\bar{R}_{jk,n}$  eingeführt. Mittels Partialbruchzerlegung gelangt man dann zu

$$H_{jk}(\Omega) = \sum_1^n \frac{\bar{R}_{jk,n}}{(s - \lambda_n)(s - \lambda_n^*)} \quad (3.11)$$

$$H_{jk} = \sum_1^n \frac{R_{jk,n}}{(s - \lambda_n)} + \frac{R_{jk,n}^*}{(s - \lambda_n^*)} \quad (3.12)$$

Dadurch ergibt sich automatisch

$$R_{jk,n} = -R_{jk,n}^* = \frac{\bar{R}_{jk,n}}{2i\omega_n} = \frac{\phi_{n,j} \phi_{n,k}}{2i\omega_n m_{gen,n}} \quad (3.13)$$

als rein imaginäres Skalar.  $R_{jk,n}$  wird Residuum der n-ten Eigenform bezüglich der Punkte j und k genannt.

Eine gleichwertige Beschreibung des Residuums basiert auf dem Ein-Freiheitsgrad-System mit allgemein viskoser Dämpfung und lautet

$$R_{jk,n} = \frac{\psi_{n,j} \psi_{n,j}}{a_{gen,n}} \quad (3.14)$$

Der Frequenzgang  $H_{jk}(\Omega)$  kennzeichnet also das Verhältnis einer am Freiheitsgrad  $k$  erzwungenen harmonischen Antwort und der am Freiheitsgrad  $j$  angreifenden harmonischen Erregung des Mehrfreiheitsgradsystems in Abhängigkeit von der Erregerkreisfrequenz  $\Omega$ . Er kann verstanden werden als das Frequenzverhalten einer Summe von harmonisch angeregten generalisierten Ein-Freiheitsgrad-Systemen, die jeweils für sich ein schwingungsfähiges System mit einem komplex konjugierten Polpaar  $\lambda_{n,1/2}$  inklusive ihrer individuellen modalen Parameter  $\omega_{0,n}$  und  $D_{gen,n}$  darstellen [25].

Jeder Eingangspunkt k kann auch ein Ausgangspunkt j sein, sodass die Frequenzgangsmatrix  $H(\Omega)$  quadratisch ist und ihre Seitenlänge sich aus der Zahl  $M$  der festgelegten Mess- bzw. Erregerpunkte ergibt.

$$[H(\Omega)] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1M} \\ H_{21} & H_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ H_{M1} & \cdots & \cdots & H_{MM} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Der Grundsatz der Wechselseitigkeit von MAXWELL besagt, dass bei einem linearen System die Antwort  $u_k(t)$  an einem Punkt k bei Erregung  $f_j(t)$  an einem Punkt j genauso groß wie die Antwort  $u_j(t)$  am Punkt j bei gleicher Erregung  $f_k(t)$  am Punkt k. Daraus folgt, dass  $H_{jk}(\Omega) = H_{kj}(\Omega)$  und  $[H]$  symmetrisch ist. Misst man also an allen Punkten die Antwort bei einer Erregung am Punkt j, dann ist gleichzeitig eine Zeile und eine Spalte der Frequenzgangsmatrix  $[H]$  gefüllt. Eine Zeile bzw. Spalte allein enthält bereits alle Informationen zur Berechnung der modalen Eigenschaften der Struktur [3].

Das Übertragungsverhalten lässt sich in Polarkoordinaten, also Amplitude  $|H(\Omega)|$  und Phasenwinkel  $\varphi(\Omega)$

$$|H(\Omega)| = \sqrt{\Re(H)^2 + \Im(H)^2} \quad (3.16a)$$

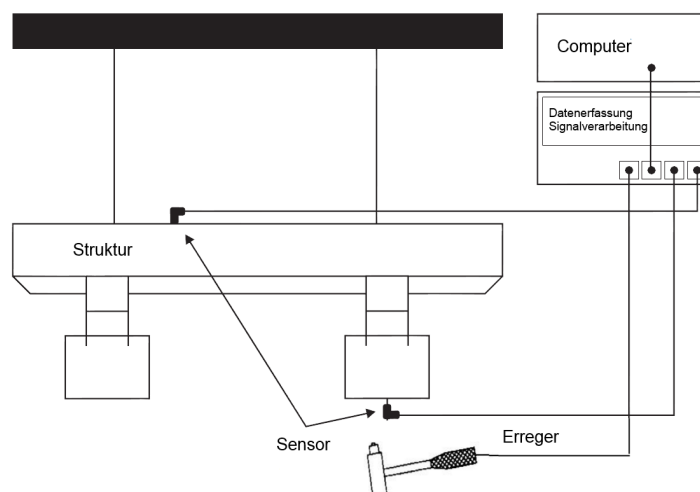
$$\varphi(\Omega) = \arctan \frac{\Im(H)}{\Re(H)} \quad (3.16b)$$

sowie in kartesischen Koordinaten, also Realteil  $\Re(H)$  und Imaginärteil  $\Im(H)$ , darstellen.

Aus der vorangegangenen Formulierung der diskretisierten Bewegungsdifferentialgleichung des Mehr-Freiheitsgrad-Systems als Frequenzgangsfunktion ergeben sich wichtige Annahmen für die experimentelle Modalanalyse: Das betrachtete System kann zu einem linearen, zeitinvariantem, stationärem und proportional gedämpftem System, dessen Vibrationsantwort ausschließlich aus einer Summe vollständig modal entkoppelter Eigenschwingungen besteht, vereinfacht werden [25].

## 3.2. Signalverarbeitung beim Phasentrennungsverfahren

In Abb. 3.1 ist der allgemeine Testaufbau dargestellt.



**Abbildung 3.1.:** Allgemeiner Testaufbau beim Frequenzbereichsverfahren [3]



### 3.2.1. Instrumentierung und Signalerzeugung

Die Laborstruktur ist das Objekt der Untersuchung. Sie muss auf eine Weise gelagert sein, die ihren Anwendungsfall oder ihre Betriebsbedingungen am besten widerspiegelt, da dies ihre modalen Eigenschaften im Sinne analytischer Randbedingungen deutlich beeinflussen kann.

Ihre Lagerung kann bspw. frei-frei, also ohne jede Einspannung behindert, oder vollständig eingespannt sein. Eine Lagerung, die nicht alle sechs Starrkörperfreiheitsgrade der Gesamtstruktur verhindert, resultiert in Starrkörpereigenformen, die im analytischen Fall alle durch eine Eigenfrequenz von 0Hz gekennzeichnet sind.

Eine freie Lagerung ist physikalisch nicht realisierbar und muss durch eine Ersatzlagerung angenähert werden. Sie wird meist durch sehr weiche, elastische Seile oder ein weiches Kissen angenähert. Sie bietet einen gewissen Grad an Einschränkungen, sodass sechs Starrkörpereigenformen mit einer Eigenfrequenz größer 0Hz wiederzufinden sind. Sie muss allerdings derart bedingt sein, dass die höchste Starrkörpereigenfrequenz weit genug unter der ersten elastischen Eigenfrequenz der Laborstruktur liegt. Die elastische Lagerung hat üblicherweise nur einen vernachlässigbaren Gesamteinfluss auf die elastischen Eigenfrequenzen, wenn die höchste Starrkörpereigenfrequenz nicht mehr als ein Drittel der niedrigsten elastischen Eigenfrequenz beträgt [17].

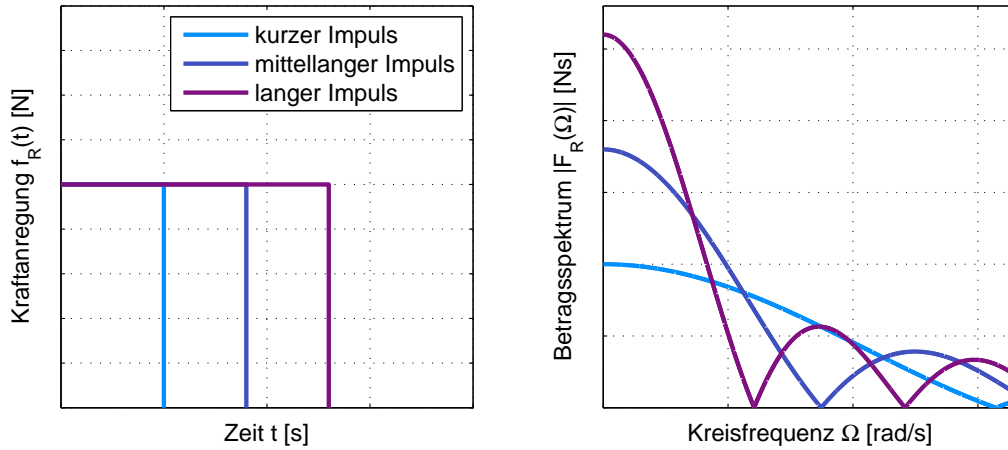
Eine vollständige Einspannung ist physikalisch ebenfalls nicht realisierbar. Besonders bei schweren Strukturen großer Abmessungen können die Befestigungen oder die Umgebung selbst eine Elastizität aufweisen, die in Starrkörpereigenformen bei höheren Frequenzen münden und Einfluss auf die modalen Eigenschaften der Struktur nehmen. Eine weitere Schwierigkeit besteht in der stark eingeschränkten Reproduzierbarkeit von Befestigungen sowie möglichen Nichtlinearitäten [3].

Die Wahl des **Erregers** ist abhängig von der Wahl des Erregersignals, welches sich in deterministische und stochastische Erregersignale klassifizieren lässt [25].

Der Kraftimpuls ist ein transientes Erregersignal und gehört zu den wichtigsten Erregersignalen, welche instationäre Strukturschwingungen erzeugen. Er wird durch ein Stoßgerät, üblicherweise einen Hammer, verursacht und regt die Struktur durch die Energiezufuhr, die abhängig von Masse und Geschwindigkeit des Hammers ist, zur Schwingung an [25].

Ein idealer Kraftimpuls entspräche  $f(t) = \hat{F} \cdot \delta(t)$  mit  $\delta(t)$  DIRAC-Funktion und  $\hat{F} \in \mathbb{R}$ . Er hat das Erregerkraftspektrum  $\mathcal{F}(f(t)) = F(\Omega) = \hat{F}$  und würde daher alle Frequenzen gleichmäßig anregen. Ein solcher Impuls ist aber physikalisch nicht möglich, sodass der spektrale Inhalt des aufgetragenen Kraftimpulses vorher betrachtet werden muss [25].

Die Steifigkeit von Hammer und Struktur bestimmt Amplitude und Dauer des Kraftimpulses, die beide wiederum den Frequenzgehalt der aufgetragenen Energie bestimmen. Die Steifigkeit der Struktur kann nicht verändert werden, sodass der Frequenzgehalt durch Änderung der Hammerspitzensteifigkeit kontrolliert wird. Je größer die Steifigkeit der Hammerspitze ist, desto kürzer ist die Impulsdauer und desto höher ist der Frequenzgehalt, sodass auch Eigen-



**Abbildung 3.2.:** Erregerkraftspektrum bei unterschiedlichen Rechteckimpulsdauern

formen hoher Eigenkreisfrequenzen messbar angeregt werden können. Abnehmende Steifigkeit der Hammerspitze verlängert die Impulsdauer, sodass der Frequenzgehalt sinkt und nur Eigenformen niedriger Eigenkreisfrequenzen messbar angeregt werden [25].

Der Einfluss der Impulsdauer auf das Erregerkraftspektrum ist beispielhaft in Abb. 3.2 anhand verschiedener Frequenzspektren von unterschiedlich langen Rechteckimpulsen  $f_R(t)$  dargestellt.

$$f_R(t) = \begin{cases} \hat{F}_R & \text{für } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.17)$$

Das Erregersignalspektrum  $F_R(\Omega)$  ist dann

$$\mathcal{F}(f_R(t)) = F_R(\Omega) = \hat{F}_R T \frac{\sin(\Omega \Delta t)}{\Omega \Delta t} \quad (3.18)$$

mit  $\hat{F}_R$  Impulsgröße und  $T = 2\Delta t$  Impulsdauer. Nullstellen liegen bei  $\Omega = \frac{2j\pi}{T}$  mit  $j \in \mathbb{N}$ . Soll ein gewisses Frequenzband angeregt werden, ist es üblich, dass die spektrale Leistungsdichte gegenüber der Frequenz bei der maximal betrachteten Frequenz um nicht mehr als 30dB abfällt [25].

Der große Vorteil des Hammers ist sein flexibler Einsatz an verschiedenen, für andere Erregertypen möglicherweise nicht erreichbaren Erregerpunkten. Seine Nachteile sind der ungenaue Treffpunkt des Schlages und der kaum exakt reproduzierbare Kraftimpuls, der stark variieren und nur durch die Anbringung von Zusatzmassen am Hammer in gewissen Grenzen gehalten werden kann.

Die Wahl der Schwingungsaufnehmer zur **Messung** von Erregung und Antwort hängt vom nutzbaren Frequenzband, linearen Verhalten, Gewicht und seiner Beständigkeit ab.

Piezoelektrische Schwingungsaufnehmer werden vorwiegend für Modaltests verwendet, weil sie klein, leicht und aufgrund ihrer sehr hohen Resonanzfrequenz auch für hochfrequente Messungen geeignet sind. Piezosensoren sind elektromechanische Sensoren, deren Kernelement ein Kristall mit permanentem Dipolmoment darstellt. Werden sie einer dynamischen mechanischen Belastung ausgesetzt und gedehnt, lässt sich an ihnen eine Messspannung in linearer Abhängigkeit von der auf sie wirkenden dynamischen Belastung abgreifen.

Ein solcher Piezosensor ist meist in einem Hammer für Modaltests verbaut und misst die Kraft, die beim Impuls auf den Hammerkopf wirkt.

Piezosensoren werden üblicherweise als seismischer Bewegungsaufnehmer zur Messung der Schwingungsantworten in Form von Beschleunigungen verwendet. Sie werden mit einer bestimmten Belastungsrichtung direkt an das Messobjekt angebracht. Sie erfahren die Schwingungen, die die Struktur an diesem Punkt in der Belastungsrichtung ausführt, und erzeugen abhängig von der äußeren dynamischen Belastung und ihrer eigenen Sensitivität ein Messsignal. Sie verändern abhängig von ihrer Befestigungsposition und ihrem Gewicht die Masse der schwingenden Struktur und haben dadurch einen Einfluss auf die modalen Eigenschaften der Struktur [25].

Als Antwortsignale werden meist Beschleunigungen verwendet, da sie proportional abhängig von der von den Piezosensoren erfahrenen Trägheitskraft sind und durch Integration im Frequenzbereich leicht die Verschiebungen der Antwortpunkte wiedergeben können [25].

Die Resonanzfrequenz des Beschleunigungsaufnehmers ist dabei abhängig von der Art der Befestigung an der Struktur. Sie ist mit 20 bis 200kHz am höchsten bei einer Verschraubung des Aufnehmers mit der Struktur und sinkt bei Anwendung von Epoxy-Zement, Wachs, Kleber und Magneten zur Befestigung. Üblicherweise soll die Resonanzfrequenz des Beschleunigungsaufnehmers 3- bis 4-mal höher liegen als die obere Messfrequenz des betrachteten Frequenzbereichs, damit der lineare Zusammenhang zwischen Beschleunigung und Messspannung keinen Störeinfluss durch eine Resonanzüberhöhungen erfährt [25].

Die Anzahl und Positionierung der verwendeten Beschleunigungsaufnehmer hängt davon ab, wie viele Eigenformen in dem betrachteten Frequenzbereich erwartet werden. Je höher die Anzahl der Eigenformen ist, desto dichter müssen die Sensoren räumlich verteilt sein, um erfasste Strukturantworten von Eigenformen höherer Schwingungsordnung verlässlich zu identifizieren und genügend aufzulösen[3].

### 3.2.2. Verarbeitung der Messsignale

Die Messsignale liegen zunächst in analoger Form vor und werden einem Analog-Digital-Wandler, der die Signale mit einer bestimmten Abtastfrequenz  $f_A$  über eine Zeit  $T_M$  zeitdiskret abtastet und digitalisiert, zugeführt [25].

Die Bitbreite des Analog-Digital-Wandlers ist ein Maß für die wertdiskrete Abtastung, auch

Quantisierung genannt, und die daraus folgende Auflösung des analogen Signals in digitaler Form. Üblich sind Bitbreiten von 12, 16 oder 24 Bit, die entsprechend  $2^{12}$ ,  $2^{16}$  bzw.  $2^{24}$  Spannungsstufen ermöglichen. Je kleiner die Bitbreite ist, desto geringer ist die Auflösung des Signals. Die Bitbreite kann es besonders bei schwachen Messsignalen notwendig machen, die Signalstärke auf den Eingangsbereich des Analog-Digital-Wandlers durch eine Vorverstärkung anzupassen, um eine genügende Auflösung des Signals zu gewährleisten [22].

Die digitalen Messsignale werden dann mittels einer diskreten FOURIER-Transformation in den Frequenzbereich überführt [25].

Die FOURIER-Reihe **periodischer, zeitkontinuierlicher** Funktionen bildet dafür die mathematische Grundlage. Sie ist in komplexer Notation definiert als

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\bar{\omega}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (\cos(n\bar{\omega}t) + i \sin(n\bar{\omega}t))$$

$$\text{mit } c_n = \frac{1}{T_n} \int_{-\frac{T_n}{2}}^{\frac{T_n}{2}} y(t) e^{-in\bar{\omega}t} dt \quad (3.19)$$

mit diskreten Kreisfrequenzen  $n\bar{\omega}$  mit  $\bar{\omega} = \text{const.}$  Sie zeigt, dass eine periodische Funktion  $y(t)$  mit der Periodendauer  $T$  durch eine Summe von  $n \in \mathbb{Z}$  vielen, im Allgemeinen gegeneinander phasenverschobenen harmonischen Funktionen mit den diskreten Kreisfrequenzen  $n\bar{\omega}$  dargestellt werden kann. Sie kann statt in komplexer Notation ebenfalls in reeller Darstellung oder in Amplituden-Phasen-Notation beschrieben werden [25].

Der komplexe FOURIER-Koeffizient  $c_n \in \mathbb{C}$  kann in kartesischen und Polarkoordinaten abgebildet werden. Er kann dann als diskretes Spektrum in Form eines Kammes über die diskreten Kreisfrequenzen  $n\bar{\omega}$  aufgetragen werden. Er besitzt die wichtige Symmetrieeigenschaft  $c_{-n} = c_n^*$ , die direkt aus Gl. (3.19) durch Einsetzen von  $n\bar{\omega}$  und  $-n\bar{\omega}$  erkennbar ist [25].

Aus der FOURIER-Reihe zeitkontinuierlicher, periodischer Funktionen gelingt der Übergang zu **zeitkontinuierlichen, nichtperiodischen** Funktionen, indem die Periodendauer  $T$  der Funktion  $f(t)$  als unendlich groß angenommen wird. Wegen  $T \rightarrow \infty$  erhöht sich die spektrale Dichte von diskreten  $n\bar{\omega}$  zu einem kontinuierlichen  $\Omega$ . Mit der eingeführten Größe  $C = 2\pi \frac{c}{\Delta\Omega}$  gelangt man über Umformungen zum FOURIER-Integral

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega$$

$$\text{mit } C(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\Omega t} dt \quad (3.20)$$

Das Spektrum  $C(\Omega) \in \mathbb{C}$  wird als FOURIER-Spektrum oder FOURIER-Transformation bezeichnet. Es hat wie das Spektrum der komplexen Koeffizienten  $c_n$  die gleiche Symmetrieeigenschaft  $C(-\Omega) = C^*(\Omega)$ , ist aber im Gegensatz zu  $c_n$  kontinuierlich [25].

Eine Eingrenzung der Integrationsgrenzen von  $C(\Omega)$  von  $-\infty$  bis  $\infty$  auf ein Intervall  $-T_M/2$  bis  $T_M/2$  produziert nur dann exakt gleiche Ergebnisse, wenn am Ende des Zeitfensters  $T_M$  genau  $y(T_M) = 0$  gilt. Ansonsten weicht das Ergebnis ab und entspricht nur einer Näherung, die umso schlechter ist, je größer die Signalanteile außerhalb des Zeitintervalls sind.

Zur Verarbeitung der diskret vorliegenden Messsignale ist der Übergang von der FOURIER-Transformation zeitkontinuierlicher Funktionen zur FOURIER-Transformation zeitdiskreter Funktionen notwendig. Dazu wird die Periodendauer  $T$  einer zeitkontinuierlichen, periodischen Funktion in  $N \in \mathbb{N}$  gleich große Zeitintervalle  $\Delta t = \frac{T}{N}$  unterteilt. Daraus ergibt sich die Abtastfrequenz

$$f_A = \frac{1}{\Delta t} \quad (3.21)$$

Zu den Zeitpunkten  $t_k = k\Delta t$ ,  $k \in \mathbb{N}$  werden die Funktionswerte  $y_k = y(t_k)$  abgetastet. Dann kann der komplexe FOURIER-Koeffizient aus Gl. (3.19) durch

$$c_n = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} y(t_k) e^{-in\bar{\omega}t_k} \Delta t = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-ink \frac{2\pi}{N}} \quad (3.22)$$

ausgedrückt werden. Der komplexe FOURIER-Koeffizient für eine zeitdiskrete, periodische Funktion  $y(t)$  hat neben der Symmetrieeigenschaft  $c_{-n} = c_n^*$  jetzt auch die Periodizitätseigenschaft, die besagt, dass sich FOURIER-Koeffizienten außerhalb des Spektrum-Intervalls  $-\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2}$  periodisch wiederholen [25].

Beide Eigenschaften zusammen bewirken praktisch, dass Spektren zeitdiskreter, periodischer Funktionen auf das Intervall  $0 \leq n \leq \frac{N}{2}$  beschränkt werden, da die Koeffizienten sich ansonsten gespiegelt oder gleichartig an anderen Stellen des Spektrums reproduziert wiederfinden [25].

Die FOURIER-Reihe **zeitdiskreter, periodischer** Funktionen lautet dann in komplexer Notation

$$y(t_k) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{ink \frac{2\pi}{N}} \quad (3.23)$$

Aus der Darstellung ergibt sich das Abtasttheorem, das besagt, dass sich die maximal im Spektrum einer zeitdiskreten periodischen Funktion repräsentierte Frequenz  $f_{max}$  wegen  $n_{max} = \frac{N}{2}$  ergibt zu

$$f_{max} = f_{\frac{N}{2}} = \frac{f_A}{2} = \frac{1}{2\Delta t} \quad (3.24)$$

Das FOURIER-Spektrum **zeitdiskreter, nichtperiodischer** Funktionen, auch diskrete FOURIER-Transformation genannt, erhält man schließlich durch Eingrenzung des Zeitfensters des kontinuierlichen Spektrums  $C(\Omega)$  in Gl. (3.20) von  $-\infty \leq n \leq \infty$  auf das Zeitintervall  $T_M$  und einer anschließenden Diskretisierung zu

$$C_n(\Omega) = \frac{T_M}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{ikn \frac{2\pi}{N}} \quad (3.25)$$

Symmetrie- und Periodizitätseigenschaften gelten auch hier.

Die Frequenzauflösung  $\Delta f$  bzw. die niedrigste darstellbare Frequenz  $f_{min}$  ergibt sich direkt aus dem Messzeitraum  $T_M$ .

$$\Delta f = \frac{1}{T_M} = f_{min} \quad (3.26)$$

Die diskrete FOURIER-Transformation ermöglicht auf diese Weise die Bestimmung der FOURIER-Spektren der digitalisierten Antwortsignale  $U_k(\Omega)$  und Erregungssignale  $F_j(\Omega)$ . Sie ist in den meisten Signalverarbeitungsgeräten als numerisch effizienter und Rechenzeit sparender Algorithmus mit der Bezeichnung *Fast-Fourier-Transformation* (dt. Schnelle FOURIER-Transformation, Abk. FFT) umgesetzt.

Der Frequenzgang  $H_{jk}(\Omega)$  ergibt sich nicht direkt durch Division von  $U_k(\Omega)$  durch  $F_j(\Omega)$  erhalten, sondern wird stattdessen mit den Leistungsdichten der Messsignale errechnet.

Die Autoleistungsdichte  $S_{xx} \in \mathbb{R}$  einer Funktion  $x(t)$  bezeichnet den Energieinhalt des Signals und wird definiert als

$$S_{xx}(\Omega) = X(\Omega)X^*(\Omega) = |X(\Omega)|^2 \quad (3.27)$$

Die Kreuzleistungsdichte  $S_{xy} \in \mathbb{C}$  zweier Zeitsignale  $x(t)$  und  $y(t)$  betrachtet die Leistung des einen mit dem anderen Signal und ist definiert als

$$S_{xy}(\Omega) = X(\Omega)Y^*(\Omega) = S_{yx}^*(\Omega) \quad (3.28)$$

Unter Einsatz der Leistungsdichten des Antwortspektrums  $U(\Omega)$  und Erregerspektrums  $F(\Omega)$  kann der Frequenzgang  $H_{fu}(\Omega)$  durch sogenannte Frequenzgangsschätzer, auch H-Schätzer genannt, errechnet werden. Die wichtigsten H-Schätzer sind

$$H_1(\Omega) = \frac{S_{fu}(\Omega)}{S_{ff}(\Omega)} = \frac{F(\Omega)U^*(\Omega)}{F(\Omega)F^*(\Omega)} \quad (3.29a)$$

$$H_2(\Omega) = \frac{S_{uu}(\Omega)}{S_{uf}(\Omega)} = \frac{U(\Omega)U^*(\Omega)}{U(\Omega)F^*(\Omega)} \quad (3.29b)$$

$$H_v(\Omega) = \frac{1}{2S_{uf}(\Omega)} \left[ (S_{uu}(\Omega) - S_{ff}(\Omega)) + \sqrt{(S_{uu}(\Omega) - S_{ff}(\Omega))^2 + 4S_{uf}(\Omega)} \right] \quad (3.29c)$$

### 3.2.3. Fehler bei der Aufnahme und Verarbeitung von Signalen

Bei Schwingungsversuchen treten bei der Messdatenaufnahme Fehler auf. Diese Fehler sind Messfehler, die bei Messungenauigkeiten, Störsignalen oder Quantisierungsfehlern bei der Digitalisierung entstehen, sowie systematische Fehler.

Der **Abschneidefehler** (engl. *Leakage*) ist ein systematischer Fehler, der in dem endlichen Messzeitraum der Zeit  $T_M$  begründet ist und zur Verzerrung eines tatsächlichen Spektrums führt [25].

Die Begrenzung des Zeitfensters ist vergleichbar mit einer Multiplikation der zeitkontinuierlichen Funktion  $y(t)$  mit einer Rechteckfunktion  $y_R(t)$  zu  $y_T(t) = y(t)y_R(t)$ . Das Spektrum ergibt sich dann zu

$$\mathcal{F}(y_T(\Omega)) = Y_T(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)Y_R(\Omega - \omega)d\omega \quad (3.30)$$

Das Spektrum des Rechteckfensters  $Y_R(\Omega)$  ist durch Gl. (3.18) beschrieben. Sein einseitiges Betragsspektrum ist in Abb. 3.2 aufgetragen. Die Faltung der Spektren  $Y(\Omega)$  und  $Y_R(\Omega)$  bewirkt eine Überlappung der Spektren zu einem verzerrten Gesamtspektrum  $Y_T(\Omega) \neq Y(\Omega)$  [25].

Der Effekt wird deutlicher bei Betrachtung einer Harmonischen mit der Kreisfrequenz  $\Omega_0$ . Eine Berechnung durch die FOURIER-Transformation über einen unendlichen Zeitraum errechnet in korrekter Weise eine einzelne Spektrallinie bei  $\Omega_0$  als Amplitudenspektrum. Dagegen errechnet die FOURIER-Transformation bei einem begrenzten Zeitraum  $T_M$ , der nicht exakt ein ganzzahliges Vielfaches der Periode der Harmonischen ist, ein verzerrtes Spektrum infolge der abgeschnittenen Signalanteile außerhalb des Zeitfensters. Die Spektrallinie bei  $\Omega_0$ , das Hauptband, ist reduziert und verbreitert, und es treten kontinuierliche spektrale Anteile, so genannte Seitenbänder, neben dem Hauptband auf, die den Energieinhalt der Harmonischen mit abbilden. Diese Spektrumsverzerrung ist umso stärker, je kürzer der betrachtete Zeitraum  $T_M$  ist, und kann eng beieinander liegende Spektrallinien verschmieren [25][44].

Bei einem transienten Signal ist das errechnete Spektrum exakt, wenn das Signal zu Beginn des Zeitfensters einsetzt und vor Ende des Zeitfensters vollständig abklingt, sodass keine Signalanteile außerhalb des Zeitfensters existieren. Ist das Spektrum noch nicht abgeklungen, ist die Verzerrung des Spektrums umso größer, je größer die Signalanteile außerhalb des Fensters sind [25][44].

Wichtungsfunktionen können das Auftreten des Abschneidefehlers begrenzen, indem sie mit der durch das Rechteckfenster begrenzten Funktionen  $y_T(t)$  multipliziert werden. Bei transient abklingenden Schwingungen, die in Erreger- und Antwortsignalen bei Modaltests mit Impulsanregung vorkommen und besonders bei schwach gedämpften Strukturen selten innerhalb des Messzeitraums ausklingen, werden vorwiegend Exponentialfenster als Wichtungsfunktionen verwendet [25].

Exponentialfenster  $y_X(t)$  lassen das Signal künstlich schneller ausklingen und bewirken somit, dass am Ende des Messzeitraums das Signal fast 0 ist und Signalanteile außerhalb des Zeitfensters  $T_M$  klein sind [25].

$$y_X(t) = \begin{cases} e^{-\delta_X t} & \text{für } 0 \leq t \leq T_M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.31)$$

mit  $\delta_X$  Abklingkonstante als Maß für die Stärke des Abklingvorgangs. Ein anderes gebräuchliches Maß ist die Abklingrate  $\chi$ .

$$\chi = y_X(T_M) = e^{-\delta_X T_M} \quad (3.32)$$

Diese künstlich aufgebrachte Dämpfung muss nachträglich aus dem identifizierten Dämpfungsmaß  $D_{gen,h}$  eliminiert werden [25].

$$D_{gen,h,korr} = D_{gen,h} - \frac{\delta_X}{\omega_{0,h}} \quad (3.33)$$

Sie kann aber zu numerischen Problemen führen, wenn die künstlich aufgebrachte Dämpfung  $\delta_X/\omega_{0,h}$  deutlich stärker als die eigentliche Dämpfung ist [44].

In [44] werden die Auswirkungen des Abschneidefehlers auf Amplitudenspektrum und identifizierte modale Parameter analytisch untersucht. Die Anwendung wird dabei eingegrenzt auf transiente Antwortsignale von impulseregten Ein- und Zwei-Freiheitsgrad-Systemen.

Die Untersuchung zeigt, dass bei Messzeiträumen  $T_M = 2\tau$  das Amplitudenspektrum einen Fehler von über 10% aufweist und erst bei  $T_M \geq 5\tau$  Fehler unter 0,5% aufweist. Der Messzeitraum muss für eine exakte Spektrumsberechnung ohne Anwendung von Wichtungsfunktionen also lange genug gewählt werden. Ansonsten treten deutlich reduzierte Hauptbänder und ausgeprägte Seitenbänder auf [44].

Die Anwendung von Exponentialfenstern mit 2% Abklingrate bei einem Messzeitraum von  $T_M = 2\tau$  glättet und reduziert die Seitenbänder sehr gut, führt aber weiterhin zu reduzierten Hauptbändern infolge der eingeführten Dämpfung [44].

Die Untersuchung zeigt aber ebenfalls, dass trotz Anwendung von Exponentialfenstern mit 2% Abklingrate und einem Messzeitraum  $T_M = \tau$  die modalen Parameter robust identifiziert werden. Bei einer genügend hohen Frequenzauflösung liegt der Fehler der Eigenkreisfrequenz unter 0,1%, des korrigierten Dämpfungsgrads 10% und des Residuums unter 5% Abweichung. Dies gilt auch bei Systemen mit hoher modaler Dichte [44].

Der **Überlappungsfehler** (engl. *Aliasing*), auch Alias-Effekt genannt, ist ein weiterer systematischer Fehler und ist der Zeitdiskretisierung des Signals geschuldet [25].

Das Messsignal ist an sich kontinuierlich und müsste für eine exakte Spektrumsberechnung vollständig vorliegen. Es wird aber nur zeitdiskret abgetastet, sodass Teile des eigentlich kontinuierlichen Signals verloren gehen und auch eine exakte Spektrumsberechnung durch eine diskrete FOURIER-Transformation das tatsächliche Spektrum nicht wiedergeben kann [25].

Diese Abtastung ist vergleichbar mit einer Multiplikation der zeitkontinuierlichen Funktion  $y(t)$  mit einer Funktion  $y_I(t)$ , die einen DIRAC-Kamm darstellt

$$y_I(t) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_k) \quad (3.34)$$

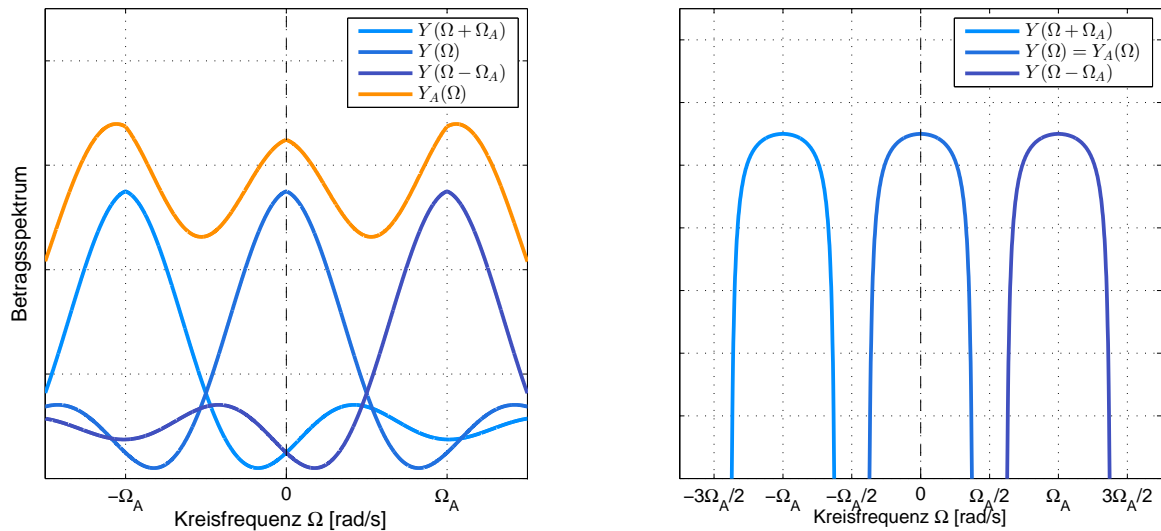
zu  $y_A(t) = y(t)y_I(t)$ . Das Spektrum  $Y_A(\Omega)$  durch Diskretisierung ergibt sich dann zu

$$\mathcal{F}(y_A(\Omega)) = Y_A(\Omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} Y(\Omega - j\Omega_A) \quad (3.35)$$

mit  $j \in \mathbb{Z}$  und der Abtastkreisfrequenz  $\Omega_A = 2\pi f_A$ . Das Spektrum  $Y_A(\Omega)$  ist eine Überlagerung unendlicher vieler Spektren  $Y(\Omega)$ , die periodisch angeordnet sind und die sich bei nichtperiodischen Funktionen  $y(t)$  über alle  $\Omega$  erstrecken. Das eigentliche Spektrum  $Y(\Omega)$  wird durch draufaddierte Anteile der frequenzverschobenen Spektren verfälscht [25].

Der Überlappungsfehler lässt sich theoretisch vermeiden, wenn Frequenzen höher als  $\Omega_{max}$





**Abbildung 3.3.:** Spektrum einer abgetasteten, nichtperiodischen Funktion  $y_A(t)$  bei  $f_{max} > f_A/2$  (links) und bei  $f_{max} < f_A/2$  (rechts)

vollständig aus der Funktion  $y(t)$  gefiltert sind und das Abtasttheorem von SHANNON  $\Omega_{max} \leq \frac{\Omega_A}{2}$  gilt. Es findet dann keine Überlappung mehr statt, weil höherfrequente Signalanteile  $\Omega \geq \Omega_{max}$  wegen der Periodizität von  $Y_A(\Omega)$  nicht zu niederfrequenten Spektrallinien dazu addiert werden [25].

Der Einfluss des Abtasttheorems ist in Abb. 3.3 dargestellt.

Der Überlappungsfehler lässt sich praktisch nicht vollständig vermeiden. Er wird lediglich durch den Einsatz von *Anti-Aliasing*-Filtern, die als Tiefpassfilter vor der Zuführung des Signals zum Analog-Digital-Wandler Frequenzen über  $f_A/2$  herausfiltern, reduziert. Der Tiefpass beeinflusst aber auch Spektralanteile unterhalb dieser Frequenz, sodass das erhaltene Spektrum nur bis etwa 80% von  $f_{max}$  genutzt werden sollte [25].

**Rauschen** ist ein Messfehler und bezeichnet unerwünschte Schwingungen mit statistisch verteilten Frequenzen. Rauschen kommt per se in analogen Messsignalen vor und kann Einfluss auf die Qualität der Messung nehmen.

Rauschen ist besonders im Kraftsignal nach Ende des im Vergleich zum Antwortsignal sehr kurzen Kraftimpulses sichtbar. Aus diesem Grund werden gemessene Beschleunigungen im Kraftsignal nach einer bestimmten Zeit der Messung als Rauschen betrachtet und mittels einer Rechteck-Fensterfunktion abgeschnitten.

Rauschen wird bei Modaltests reduziert, indem mehrere Messdatensätze sequentiell aufgenommen und jeweils gemittelt werden [25].

Die **Berechnung mittels H-Schätzern** kann lediglich Näherungen für den Frequenzgang  $H(\Omega)$  liefern, da die gemessenen Leistungsdichten infolge von Messfehlern und Störungen in

den Messsignalen fehlerbehaftet sind [25].

Der H1-Schätzer ist bei dominant fehlerbehafteter Antwort die beste Näherung und nähert Anti-Resonanzen am besten an. Der H2-Schätzer ist dagegen bei dominant fehlerbehafteter Erregung die beste Näherung und nähert Resonanzen am besten an. Der  $H_v$ -Schätzer ist dann die beste Approximation, wenn die Fehler in beiden Signalen in etwa der gleichen Größenordnung liegen [25].

### 3.2.4. Kohärenz der Messsignale

Ein Maß für die Güte der durchgeführten Messungen ist die Kohärenzfunktion  $\gamma^2$

$$\gamma_{fu}^2 = \frac{|S_{fu}(\Omega)|^2}{S_{ff}(\Omega)S_{uu}(\Omega)} \text{ mit } 0 \leq \gamma_{fu} \leq 1 \quad (3.36)$$

Die Kohärenzfunktion bewertet die Kohärenz (lat. *cohaerentia*, Zusammenhang) einer Erregung  $f_j(t)$  an einem Punkt j und einer Antwort  $u_k(t)$  an einem Punkt k, also die Abhängigkeit des Antwortsignals  $u_k(t)$  vom Erregersignal  $f_j(t)$ . Sie eignet sich daher zur Validierung der Messung [25].

Die Kohärenzfunktion ist erst dann nützlich, wenn die verwendeten Leistungsdichten aus mehreren Mittlungen stammen, denn bei nur einem einzigen Messdatensatz ist automatisch  $\gamma_{fu}^2 = H(\Omega)/H(\Omega) = 1$  für alle Frequenzen  $\Omega$ . Erst bei mehreren Datensätzen sinken  $|S_{fu}(\Omega)|$  und  $\gamma_{fu}^2$  [25].

Für eine hohe Kohärenz  $\gamma_{fu} > 0,9$  mehrerer Messdatensätze müssen die Messsignale vergleichbar sein, sodass insbesondere folgende Einflüsse minimiert werden müssen:

- Zufällige Messfehler, vor allem Rauschen und nicht beeinflussbare Störsignale [25]
- Unzureichende Annahmen, vor allem Nichtlinearität und Zeitvarianz des Systems [3]
- Systematische Fehler, vor allem Abschneidefehler [25]
- Veränderte Testbedingungen bzgl. Antwort: veränderte Sensorpositionen, -befestigung [3]
- Veränderte Testbedingungen bzgl. Impulserregung durch Hammer: variabler Schlagpunkt, variable Impulsdauer, variabler Schlagwinkel, Doppelschläge [44]

Kohärenzabfälle bis hin zu Null ergeben sich automatisch bei Frequenzen  $\Omega$ , die im Frequenzgang  $H_{jk}(\Omega)$  durch Anti-Resonanzen gekennzeichnet sind. Sie sind damit begründet, dass an diesen Stellen keine Bewegung des Schwingungsknoten k bei der Frequenz  $\Omega$  stattfindet, da sich benachbarte Eigenformen an diesem Punkt gegenseitig auslöschen. Sie zeigen, dass in dem Fall statistisch verteiltes Rauschen einen höheren Einfluss hat. Diese Kohärenzabfälle sind nicht zu vermeiden, sollten aber scharf begrenzt sein, denn weiche Abfälle kennzeichnen keinen festen Schlagpunkt.

Stetig abfallende Kohärenz oberhalb einer bestimmten Frequenz kennzeichnen die Begrenzung des nutzbaren Frequenzbereichs des Modalhammers, weil Frequenzen oberhalb dieser Frequenz nicht mehr angeregt werden und Rauschen einflussreicher ist [25].

### 3.3. Identifikation modaler Parameter mittels des PolyMAX-Verfahrens

Die experimentell ermittelten Frequenzgänge werden verwendet, um die darin enthaltenen modalen Parameter des Systems mittels mathematischer Algorithmen zu identifizieren.

Identifikationsalgorithmen zur Abschätzung der modalen Parameter aus den messtechnisch erhaltenen Frequenzgängen können in Ein-Freiheitsgrad- und Mehr-Freiheitsgrad-Verfahren unterteilt werden. Ein-Freiheitsgrad-Verfahren legen dem Algorithmus das mathematische Modell eines Ein-Freiheitsgrad-Systems zugrunde. Mehr-Freiheitsgrad-Verfahren legen dem Algorithmus das mathematische Modell eines Systems mit mehreren Freiheitsgraden entsprechend der Zahl von Eigenfrequenzen in dem betrachteten Frequenzbereich zugrunde [25].

Mehr-Freiheitsgrad-Verfahren werden vor allem bei starker modaler Kopplung und zum Erhalt genauerer Ergebnisse verwendet, dürfen aber ausschließlich auf schwach gedämpfte Systeme angewandt werden [25].

Mehr-Freiheitsgrad-Verfahren lassen sich in modale und direkte Verfahren unterteilen. Modale Verfahren bauen auf den modalen Darstellungen der Frequenzgänge der gemessenen Schwingungsantworten  $H(\Omega)$  auf und zerlegen sie spektral in die zu bestimmenden modalen Parameter. Direkte Verfahren identifizieren die Systemmatrizen und berechnen die modalen Größen numerisch durch Lösung des Eigenwertproblems [25].

Die Verfahren können ebenfalls in lokale und globale Verfahren unterschieden werden. Lokale Verfahren nutzen lediglich ein Element  $H_{jk}(\Omega)$  der Frequenzgangsmatrix  $[H]$ , um modale Parameter einer Struktur zu bestimmen. Globale Verfahren nutzen mehrere oder alle gemessenen, verfügbaren Elemente  $H_{jk}(\Omega)$  in einem Identifikationsalgorithmus, um globale Schätzungen von modalen Parametern zu erhalten [25].

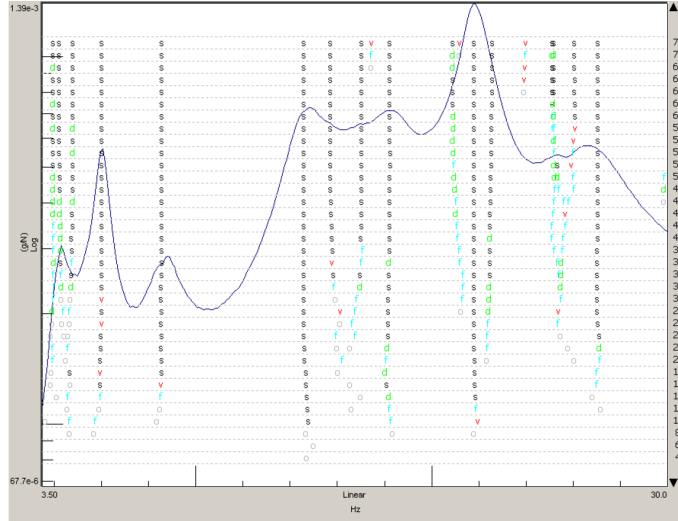
#### 3.3.1. PolyMAX

PolyMAX ist ein modales, globales Mehr-Freiheitsgrad-Verfahren, dessen Anwendung aufgrund genauerer Ergebnisse und aufgrund der hohen modalen Dichte der Laborstruktur gewählt wird. Es wird auch *Poly-Reference Least-Squares Complex Frequency Domain method* (dt.: Poly-Referenz-Kleinste-Quadrate-Methode im komplexen Frequenzbereich, Abk. pLSCF) genannt und ist eine Weiterentwicklung des ursprünglichen LSCF-Verfahrens [19].

$H_{jk}(\Omega)$  kann, wie in Kap. 3.1 gezeigt, durch eine Summe von Partialbrüchen

$$H_{jk}(\Omega) = \sum_1^n \frac{R_{jk,n}}{(s - \lambda_n)} + \frac{R_{jk,n}^*}{(s - \lambda_n^*)} \quad (3.37)$$

dargestellt werden, kann aber auch in äquivalenter Weise in Form einer gebrochen rationalen



**Abbildung 3.4.:** Stabilisierungsdiagramm (Beispielbild) [34]

Funktion geschrieben werden.

$$H_{jk}(\Omega) = \frac{\beta_{jk,0}s^q + \beta_{jk,1}s^{q-1} + \dots + \beta_{jk,q}}{\alpha_0s^p + \alpha_1s^{p-1} + \dots + \alpha_p} = \frac{B_{jk}(\Omega)}{A(\Omega)} \quad (3.38)$$

Jedes Element  $H_{jk}(\Omega)$  besitzt das gleiche Nennerpolynom  $A(\Omega)$ , da Pole bzw. Eigenwerte globale Systemeigenschaften sind. Die Zählerpolynome  $B_{jk}(\Omega)$  sind individuell verschieden, da jedes Residuum lokale Eigenschaften einer Eigenform am Messpunkt  $j$  widerspiegelt.

Das pLSCF-Verfahren PolyMAX verwendet nun eine Zeile oder Spalte der Frequenzgangsmatrix  $[H]$  [19]. Dabei darf  $\Omega$  auf ein Frequenzband  $\Omega_{min} \leq \Omega \leq \Omega_{max}$  begrenzt werden, um besonders bei Frequenzgängen mit hoher Frequenzauflösung den folgenden numerischen Aufwand zu reduzieren [17].

Für jedes Element löst das Verfahren dann ein überbestimmtes Gleichungssystem und minimiert jeden Fehler in einer Ausgleichsrechnung (engl.: *Curve Fitting*)

$$\varepsilon_{jk}(\Omega) = A(\Omega)\bar{H}_{jk}(\Omega) - B_{jk}(\Omega) \quad (3.39)$$

mittels der Methode der kleinsten Quadrate. Dieser Annäherungsalgorithmus geschieht für mehrere Modellordnungen  $p$  von 2 bis einem Vielfachen der erwarteten Eigenkreisfrequenzen eines Systems [19]. Hohe Modellordnungen liefern einerseits mehr Pole als tatsächlich im System vorhanden sind, erlauben aber gleichzeitig auch eine sehr hohe Genauigkeit der Annäherung [34].

Die Lösung des Gleichungssystem mittels pLSCF für jede Modellordnung besteht aus den Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$ , mit denen Gl. (3.38) formuliert wird [19].

Die Ergebnisse werden üblicherweise dann in einem Stabilitätsdiagramm dargestellt. Dieses Diagramm trägt das Frequenzspektrum eines oder mehrerer, frequenzbegrenzter Spektren  $\bar{H}_{jk}(\Omega)$

auf und überlagert das Diagramm mit einem zweiten Diagramm, das die Pole mit „s“ über die Frequenz  $\Omega$  und die Modellordnung  $p$  markiert. In Abb. 3.4 ist beispielhaft ein solches Diagramm dargestellt [17].

In einem manuellen Schritt muss dann eine Auswahl von  $\bar{N}$  Polstellen vorgenommen werden. Diese Auswahl muss physikalische Polstellen beinhalten, die eine eigenständige Eigenform beschreiben und den Spektrumsverlauf im Frequenzband  $\bar{H}_{jk}(\Omega)$  mittels Gl. (3.40) beschreiben.

Um das Auffinden von tatsächlichen Resonanzstellen und einhergehenden physikalischen Polstellen zu vereinfachen, können die Stabilisierungsdiagramme oft noch mit Indicator Functions (dt.: Hinweisfunktionen) zusätzlich überlagert werden. Als Beispiele seien hier einmal die Summe der Frequenzgänge aller  $k$  Messpunkte genannt, sowie die Mode Indicator Function (dt.: Eigenform-Anzeigefunktion, Abk. MIF) [17].

Polstellen müssen hinsichtlich ihrer physikalischen oder numerischen Natur bewertet werden. In der Praxis werden Polstellen gesucht, die sich im Vergleich zu ihren Nachbarn größerer und kleinerer Modellordnung bezüglich Frequenz und Dämpfung wenig ändern und als stabil betrachtet werden können [34]. Poläste, die bei höherer Modellordnung nah bei einem Stamm-Polast hinzukommen und keiner eigenen Resonanzspitze zugeordnet werden können, müssen genau betrachtet werden, ob sie tatsächlich eine neue Eigenform beschreiben oder mathematische Artefakte sind.

Die  $\bar{N}$  manuell gewählten Polstellen werden in

$$\bar{H}_{jk}(\Omega) = -\frac{\bar{R}_{jk,U}}{\Omega^2} + \left[ \sum_1^n \frac{R_{jk,n}}{(s - \lambda_n)} + \frac{R_{jk,n}^*}{(s - \lambda_n^*)} \right] + \bar{R}_{jk,O} \quad (3.40)$$

eingesetzt.  $\frac{\bar{R}_{jk,U}}{\Omega^2}$  und  $\bar{R}_{jk,O}$  beschreiben dabei annähernd den Einfluss mehrerer benachbarter Eigenformen unterhalb und oberhalb des Frequenzbandes [17].

Die ausgewählten Polstellen ermöglichen die Bestimmung aller  $2\bar{N} + 2$  Residuen  $R_{jk,\bar{n}}$ ,  $R_{jk,\bar{n}}^*$ ,  $\bar{R}_{ij,U}$  und  $\bar{R}_{ij,O}$  aus den gemessenen Frequenzgängen in einem überbestimmten Gleichungssystem mittels der Methode der kleinsten Quadrate. Dieser letzte Schritt wird auch *Least-Squares Frequency Domain method* (dt.: Kleinste-Quadrate-Methode im Frequenzbereich, Abk. LSFD) genannt [34].

Die  $2\bar{N} + 2$  erhaltenen Residuen können dann theoretisch mittels Gl. (3.13) oder mittels Gl. (3.14) eine Berechnung der Eigenformen und weiterer modaler Eigenschaften ermöglichen.

Die Bestimmung der Eigenvektoren und des modalen  $a_{gen,\bar{n}}$  erfordert die Messung der Antwort am Erregerort. Dabei werden die Elemente der komplexen Eigenvektoren für das Residuum des Erregerpunktes  $j$  zu 1 gesetzt. Dieses Verfahren ist in [35] begründet und in [36] näher erläutert.

$$R_{jj,\bar{n}} = \frac{\phi_{\bar{n},j}\phi_{\bar{n},j}}{2i\omega_n m_{gen,n}} \equiv \frac{\psi_{\bar{n},j}\psi_{\bar{n},j}}{a_{gen,\bar{n}}} \text{ mit } \psi_{\bar{n},j} = 1 \quad (3.41)$$

Anschließend können die restlichen Elemente des Eigenvektors  $\{\psi\}$  bestimmt werden. Für das

modale  $a$  ergibt sich

$$a_{gen,\bar{n}} = \frac{1}{R_{jj,\bar{n}}} \equiv 2i\omega_{\bar{n}}m_{gen,\bar{n}} \in \mathbb{C} \quad (3.42)$$

und für die modale Masse als Schätzung

$$m_{gen,\bar{n}} = \left| \frac{a_{gen,\bar{n}}}{2i\omega_{\bar{n}}} \right| \in \mathbb{R} \quad (3.43)$$

Man geht somit davon aus, dass bei Normierung 1 auf die größte Eigenvektorkomponente keine modale Masse größer als die tatsächliche Systemmasse ist.

Idealerweise ist das Residuum  $R_{jj,\bar{n}}$  und somit das modale  $a_{gen,\bar{n}}$  gemäß Gl. (3.13) rein imaginär. In der Praxis hat das Residuum aber einen Realteil, sodass die erhaltenen Eigenformen komplex sind,  $a_{gen,\bar{n}}$  einen Realteil besitzt und  $m_{gen,\bar{n}}$  komplex ist. Daher ist Gl. (3.43) eine Schätzung, deren Güte mit sinkender Komplexität der Eigenformen und wachsendem Imaginärteil von  $a_{gen,\bar{n}}$  wächst.

Mit  $a_{gen,\bar{n}}$  und  $m_{gen,\bar{n}}$  ist zuletzt eine Abschätzung der modalen Steifigkeit  $k_{gen,\bar{n}}$ , der modalen Dämpfung  $d_{gen,\bar{n}}$  und des modalen  $b_{gen,\bar{n}}$  durch die Beziehungen des Ein-Freiheitsgrad-Systems möglich.

Mit den modalen Parametern erhält man somit ein modales Modell für alle identifizierten Eigenformen im betrachteten Frequenzband.

### 3.3.2. Qualitätsindikatoren und Korrelationskriterien

Die zwei letzten Schritte der Identifikation der modalen Parameter, die manuelle Auswahl der Polstellen sowie die Berechnung der Eigenformen durch das LSFD-Verfahren, müssen im Verbund oft mehrmals iterativ geschehen und auf ihre Ergebnisse überprüft werden, um physikalisch konsistente Ergebnisse zu erhalten und zu optimieren.

Wenn vor dem Modaltest bereits ein FE-Modell zur Verfügung stand, welches die experimentell getestete Struktur mathematisch modelliert und modale Eigenschaften numerisch bestimmen konnte, können die experimentell bestimmten Eigenformen mit den erwarteten, mathematisch bestimmten Eigenformen grob verglichen werden [47].

Besonders bei schwacher Anregung bestimmter Eigenformen sind die erhaltenen Eigenvektoren  $\{\psi\}$  oft sehr stark komplex, phasenunrein und deshalb von niedriger Qualität. Aus diesem Grunde werden die erhaltenen Eigenformen nach der Berechnung des LSFD-Verfahrens durch **Qualitätsindikatoren** bewertet, um die Qualität der identifizierten Eigenform einschätzen und auf diese Weise die qualitativ hochwertigsten Eigenformen identifizieren zu können [17].

Das *Modal Phase Collinearity* (dt.: Modale Phasenkollinearität, Abk. MPC) Kriterium bewertet die Komplexität eines Eigenvektors. Es gibt an, wie stark der Phasenversatz  $\varphi_{n,k}$ , definiert in

Gl. (2.79), des k-ten Freiheitsgrades  $\psi_{n,k}$  der n-ten Eigenform  $\{\psi_n\}$  durchschnittlich vom Phasenversatz der anderen Elemente abweicht. Das Kriterium ist 1 bzw. 100% und die Eigenform reell, wenn  $\Re(\{\psi_n\})$  proportional zu  $\Im(\{\psi_n\})$  ist [17].

Das *Mean Phase Deviation* (dt.: Durchschnittliche Phasenabweichung, Abk. MPD) Kriterium bewertet ebenfalls die Komplexität eines Eigenvektors. Es berechnet die Standardabweichung der Phasen  $\varphi$  aller  $m$  Freiheitsgrade in  $^\circ$ . Sie beträgt  $0^\circ$  bei reellen Eigenformen [17].

Oft wird oft die Phase von  $a_{gen,\bar{n}} \in \mathbb{C}$  als Qualitätsindikator verwendet, um das Verhältnis von  $\Im(a_{gen,\bar{n}})$  gegenüber  $\Re(a_{gen,\bar{n}})$  darzustellen. Bei rein reellen Eigenformen beträgt die Phase von  $a_{gen,\bar{n}}$   $-90^\circ$ . **Korrelationskriterien** vergleichen modale Eigenschaften, vor allem identifizierte Eigenformen, untereinander.

Das wichtigste Korrelationskriterium ist das *Modal Assurance Criterion* (dt.: Modales Kontrollkriterium, Abk. MAC). Es überprüft, in welchem Maße zwei betrachtete Eigenformen j und k linear abhängig voneinander, also wie ähnlich sie zueinander sind. Mathematisch errechnet es das normierte Skalarprodukt beider Vektoren im Raum und liefert den Wert 1 für genau kollineare Vektoren bis 0 für komplett unabhängige Vektoren [17].

$$MAC_{jk} = \frac{(\{\phi_j\}^T \{\phi_k\})^2}{(\{\phi_j\}^T \{\phi_j\}) (\{\phi_k\}^T \{\phi_k\})} \quad (3.44)$$

In der Praxis weisen MAC-Werte zwischen 0,85 und 1 auf zusammen gehörige Eigenformen hin. MAC-Werte zwischen 0,7 und 0,85 weisen auf Eigenformen, die sehr ähnlich sind und mit hoher Wahrscheinlichkeit zusammen gehören, wenn keine ähnlich hohen Werte gegenüber anderen Eigenformen vorhanden sind. MAC-Werte darunter weisen auf Eigenformen hin, die Ähnlichkeiten aufweisen und unter Umständen zueinander gehören könnten, aber genauer betrachtet werden sollten.

Da die identifizierten Eigenformen in der Regel komplex sind, müssen die Eigenvektoren reell gemacht werden. Die folgende Gleichung sollte nur für schwach komplexe Eigenvektoren eingesetzt werden, da ansonsten zu große Fehler auftreten [17].

$$\phi_{n,j} = \operatorname{sgn} \left( \Re \left( \frac{\psi_{n,j}}{\max(\{\psi_n\})} \right) \right) \sqrt{\frac{\psi_{n,j} \psi_{n,j}^*}{\max(\{\psi_n\}) \max(\{\psi_n\})^*}} \quad (3.45)$$





## 4. Theorie zur Parameteranpassung

Die Genauigkeit der Ergebnisse des FE-Rechenmodells hängt wie in Kap. 1.2 beschrieben von der Modellqualität, also von der Idealisierung und der Diskretisierung der realen Struktur, sowie von der Güte der Systemparameterwerte ab. Vergleicht man die Ergebnisse des FE-Rechenmodells mit den Ergebnissen der experimentellen Systemidentifikation, treten mehr oder minder große Abweichungen auf. Sind diese Abweichungen nicht vernachlässigbar und wurden Modellstrukturfehler im FE-Rechenmodell in vorangegangenen Untersuchungen bereits minimiert, bleibt als zusätzliche Möglichkeit eine Korrektur der Systemparameterwerte des Rechenmodells, um die Übereinstimmung der Rechenmodell- und Experimentalergebnisse zu verbessern [31]. Die Experimentalergebnisse sind allerdings oft ebenfalls mit Fehlern aufgrund unpräziser Messdaten behaftet.

Vergleichbare Ergebnisse einer EMA und einer FE-Analyse können Zeitdaten und Übertragungsfunktionen sein, sind in den meisten Anwendungsfällen aber identifizierte modale Eigenschaften der Struktur [30].

Die systematische Korrektur der Systemmatrizen des FE-Rechenmodells durch Experimentalergebnisse wird als indirekte Identifikation bezeichnet. Sie wird mithilfe von frei gewählten Korrekturparametern durchgeführt, die die Submatrizen der Systemmatrizen  $[M]$ ,  $[D]$  und  $[K]$  des Rechenmodells beschreiben und die Vergleichsergebnisse vonseiten des Rechenmodells beeinflussen [31].

Aus den Vergleichsergebnissen der FEM und der EMA werden Vektoren  $\{\varepsilon\}$  aus Residuen  $\varepsilon$  gebildet, die minimiert werden sollen. Sie stellen mit Gl. (4.1) ein Zielfunktional  $Z$  dar [31].

$$Z = \{\varepsilon\}^T [W_\varepsilon] \{\varepsilon\} \quad (4.1)$$

Dieses Zielfunktional  $Z$  stellt die Summe der gewichteten Fehlerquadrate dar, wobei hier  $[W_\varepsilon]$  eine hermitesche, positiv definite konstante Wichtungsmatrix ist, um Residuen bspw. je nach Qualität der Testdaten wichten zu können [30].

$$[W_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \lambda_{m,1}^{-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{m,j}^{-2} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Zwischen den Residuen  $\{\varepsilon\}$  bzw. dem Zielfunktional  $Z$  und den Korrekturparametern  $p$  besteht meistens ein nichtlinearer Zusammenhang, sodass das Minimierungsproblem iterativ gelöst werden muss [31].

## 4.1. Sensitivitätsmethode

Die Sensitivitätsmethode stellt einen Ansatz zur Lösung des Minimierungsproblems dar. Sie geht von der Annahme aus, dass sämtliche Abweichungen zwischen den modalen Eigenschaften und den Modellparametern alleine durch Unsicherheiten in den Rechenmodell-Parametern begründet ist. Sie führt eine Linearisierung des allgemein nichtlinearen Zusammenhangs zwischen modalen Eigenschaften und Modellparametern durch, indem sie das Problem als eine Taylor-Reihe, die nach dem linearen Glied abgebrochen wird, formuliert [30][39].

Bspw. wird die Abhängigkeit des  $j$ -ten Eigenwertes  $\lambda_j$  vom  $k$ -ten Parameter  $p_k$  folgendermaßen dargestellt [16]:

$$\begin{aligned}\lambda_j(p_k) &= \lambda_j + \frac{\partial \lambda_j}{\partial p_k} \Delta p_k \\ \lambda_j(p_k) - \lambda_j &= \frac{\partial \lambda_j}{\partial p_k} \Delta p_k\end{aligned}\tag{4.3}$$

Die linke Seite wird als Residuum  $\varepsilon_j = \lambda_j(p_k) - \lambda_j = \lambda_{m,j} - \lambda_{a,j}$  zwischen identifiziertem Eigenwert  $\lambda_{m,j}$  aus der EMA und dem dazugehörigen, mit den Anfangssystemparametern  $\{p_{0,k}\}$  berechneten Eigenwert  $\lambda_{a,j}$  aus der FEM definiert. Der Systemparameter  $p_k$  sollte physikalisch bedeutsam sein und direkten Einfluss auf die Material-, Steifigkeits- oder Dämpfungseigenschaften des Systems haben [29]. Erweitert man das Gleichungssystem für mehrere Eigenwerte  $\lambda$  und Parameter  $p$ , gelangt man zu

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_j \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_{a,1}}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \lambda_{a,1}}{\partial p_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \lambda_{a,j}}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \lambda_{a,j}}{\partial p_k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta p_1 \\ \vdots \\ \Delta p_k \end{Bmatrix} \\ &= [G_\lambda] \{\Delta p\}\end{aligned}\tag{4.4}$$

mit  $[G_\lambda]$  Sensitivitätsmatrix. Die Sensitivitätsmatrix erfasst, wie empfindlich sich die analytisch berechneten Eigenwerte  $\lambda_{a,j}$  gegenüber einer infinitesimal kleinen Parameteränderung  $\partial p_k$  verhalten.

Wenn  $[G_\lambda]$  vollen Rang hat und eine Pseudo-Inversion möglich ist, kann man schreiben

$$\{\Delta p\} = [G_\lambda]^+ \{\varepsilon\}\tag{4.5}$$

sodass die Änderung  $\{\Delta p\}$  der Systemparameter  $\{p_{0,k}\}$  zur Minimierung des Residuums  $\{\varepsilon\}$  errechnet ist.

$$\{p_{1,k}\} = \{p_{0,k}\} + \{\Delta p\}\tag{4.6}$$

Die neu errechneten Systemparametern  $\{p_{1,k}\}$  sollten weiterhin physikalisch sinnvoll sein [29].

Mit den neuen Systemparametern  $\{p_{1,k}\}$  können neue analytische Eigenwerte  $\lambda_{a,j}$  berechnet werden, sodass sich neue Werte für das Residuum  $\{\varepsilon\}$  und eine neue Sensitivitätsmatrix  $[G_\lambda]$  ergeben. Diese Iteration wird so lange wiederholt, bis das Zielfunktional  $Z$  ausreichend klein ist oder sich nicht mehr signifikant ändert.

## 4.2. Sensitivität komplexer Eigenwerte

Eine grundsätzliche Schwierigkeit besteht in der Auswahl der Systemparameter  $p_k$ , die für eine Anpassung modaler Eigenschaften verwendet werden. Dabei bietet die Sensitivitätsanalyse eine Hilfestellung, um die Parameter zu identifizieren, die signifikanten Einfluss auf die Analyseergebnisse zeigen [39].

Die Sensitivität von Eigenwerten  $\frac{\partial \lambda_j}{\partial p_k}$  gegenüber Änderungen der Systemparameter  $p_k$  kann analytisch hergeleitet werden.

Die Eigenwertsensitivität ungedämpfter Systeme bezüglich eines Parameters  $p_k$  kann man durch Ableitung des quadratischen Eigenwertproblems des ungedämpften Mehr-Freiheitsgrad-Systems Gl. (2.61) erhalten [30][31][14].

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial p_k} = \{\phi_j\}^\top \left( -\lambda_j \frac{\partial [M]}{\partial p_k} + \frac{\partial [K]}{\partial p_k} \right) \{\phi_j\} \text{ mit } \frac{\partial \lambda_j}{\partial p_k} \in \mathbb{R} \quad (4.7)$$

Die Sensitivität für allgemein viskos gedämpfte Systeme gelingt durch Ableitung des allgemeinen Eigenwertproblems des viskos gedämpften Systems [1][2][31].

$$\left( \lambda_n^2 [M] + \lambda_n [D] + [K] \right) \{\psi_n\} = \{0\} \quad (4.8)$$

In mehreren Schritten wird so die analytische Formulierung der komplexen Eigenwertsensitivität erreicht [1][2].

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial p_k} = \lambda_j \frac{\{\psi_j\}^\top \left( \frac{\partial [K]}{\partial p_k} + \lambda_j^2 \frac{\partial [M]}{\partial p_k} + \lambda_j \frac{\partial [D]}{\partial p_k} \right) \{\psi_j\}}{\{\psi_j\}^\top \left( -\lambda_j^2 [M] + [K] \right) \{\psi_j\}} \text{ mit } \frac{\partial \lambda_j}{\partial p_k} \in \mathbb{C} \quad (4.9)$$

Bei Hinzunahme der Veröffentlichung [1] ist der dortige Herleitungsweg sowie die hergeleitete Beziehung für die komplexe Eigenwertsensitivität mit Vorsicht zu betrachten, da die eher unübliche Symboldefinition  $s_n = i\lambda_n$  mit  $s_n$  als „Eigenwert“ und  $\lambda_n$  als „natürliche Frequenz“ verwendet wird. Diese Nomenklatur mündet in einer scheinbar anders formulierten Gleichung als hier angegeben.

Eine verständlichere Darstellung findet sich in der Folgeveröffentlichung [2]. Die komplexe Eigenwertsensitivität auf Basis der Darstellung als linearisierte Eigenform ist in [22] beschrieben.

Die Sensitivität kann auch für allgemein strukturell gedämpfte Systeme hergeleitet werden. Sie basiert auf der Ableitung des quadratischen Eigenwertproblems Gl. (2.89) und kann auf gleiche Weise wie Gl. (4.9) hergeleitet werden, sodass man zum Ausdruck

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial p_k} = \lambda_j \frac{\{\psi_j\}^\top \left( \frac{\partial [K^c]}{\partial p_k} + \lambda_j^2 \frac{\partial [M]}{\partial p_k} \right) \{\psi_j\}}{\{\psi_j\}^\top \left( -\lambda_j^2 [M] + [K^c] \right) \{\psi_j\}} \text{ mit } \frac{\partial \lambda_j}{\partial p_k} \in \mathbb{C} \quad (4.10)$$

gelangt.

Ein gemischter Ausdruck, der die Sensitivität komplexer Eigenwerte von gleichzeitig viskos und strukturell gedämpften Systemen berücksichtigt, ist daraus nicht ableitbar, da die Eigenwerte  $\lambda_n$  beider Eigenwertprobleme auf unterschiedlichen Definitionen basieren, wie in Kap. 2.4 gezeigt.

## 5. Anwendungsbeispiel: Rechteckplatte

In diesem ersten Anwendungsbeispiel wird eine willkürliche Struktur, welche in zwei Substrukturen unterteilt werden kann, betrachtet und mathematisch modelliert.

Verschiedene Typen an proportionalen Dämpfungsmodellierungen sollen die Dämpfungsmechanismen in den Substrukturen abbilden. Diese Typen sind die klassische RAYLEIGH-Dämpfung und die strukturelle Dämpfung und werden mit wenigen Verlustfaktoren  $g$  beschrieben.

Die Kopplung der gedämpften Substrukturen führt zu einer globalen Massen-, Steifigkeits- und einer nichtproportionalen Dämpfungsmatrix für die gesamte Struktur. Mit ihnen können auf numerischem Wege modale Eigenschaften, vor allem globale modale Dämpfungsmaße, der Gesamtstruktur errechnet werden.

Das Ziel der folgenden Untersuchung ist, wie empfindlich die globalen modalen Dämpfungsmaße gegenüber einer Änderung der proportionalen Verlustfaktoren  $g$  der Substrukturen sind, und ob eine mathematische Grundlage für eine computergestützte Anpassung der globalen Dämpfungsmaße vorhanden ist.

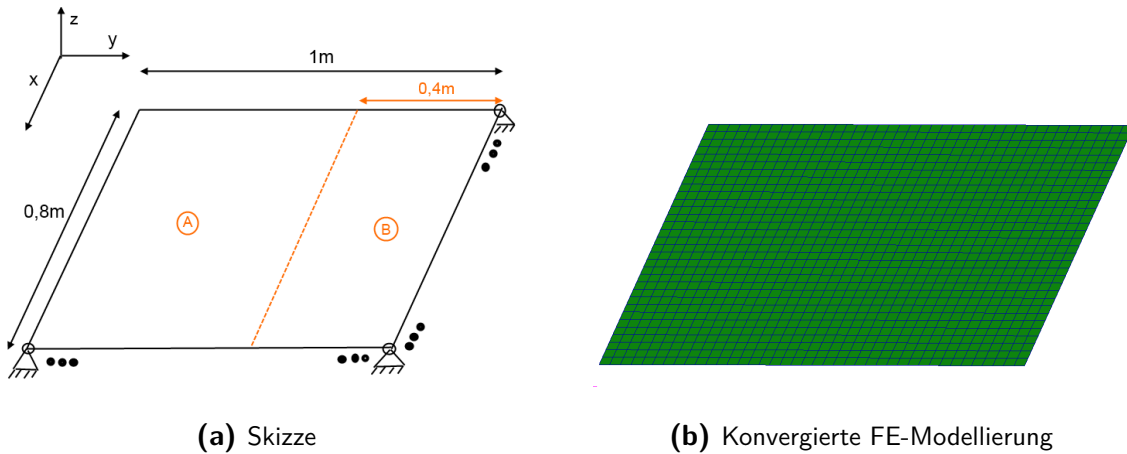
### 5.1. Eigenschaften und Finite-Elemente-Modellierung

Bei der willkürlich angenommenen Rechteckplatte handelt sich um eine linear elastische, steife, dünne ebene Platte, die aus homogenem isotropem Aluminium besteht.

Sie ist in Abb. 5.1a skizziert. Sie besitzt Seitenlängen von  $l_x = 0,8$  und  $l_y = 1$  m parallel zu den Koordinatenachsen  $x$  und  $y$  in der Ebene und hat über die gesamte Struktur eine Dicke von  $h = 0,01$  m in  $z$ -Richtung. Sie ist nach der KIRCHHOFF'schen Theorie modelliert und stellt daher ein zweidimensionales Problem dar. Sie ist schubstarr und besitzt nur drei Freiheitsgrade – Translation in Dickenrichtung und Rotation um die Achsen in der Ebene – besitzt. Sie ist außerdem an allen äußeren Rändern drehbar gelagert, sodass dort jegliche Translation in Dickenrichtung unterbunden ist, Rotationen aber möglich sind.

Material	Dichte $\rho$ [ $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ]	E-Modul $E$ [GPa]	Poissonzahl $\nu$ [-]
Aluminium	2700	70	0.33

**Tabelle 5.1.:** Verwendete Materialkennwerte von Aluminium



**Abbildung 5.1.:** Skizze mit Abmaßen und FE-Modell der Platte

Diese Modellierung bewirkt, dass Schwingungen  $w(x, y, t)$  nur in Dickenrichtung, also  $z$ -Richtung, stattfinden. Sie mündet für freie Schwingungen des Plattenkontinuums in eine homogene partielle Differentialgleichung. Mit den vorliegenden Randbedingungen lautet die Beschreibung der Gesamtbewegungsform

$$w(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{w}_{jk} \sin\left(\frac{j\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{k\pi y}{l_y}\right) \quad (5.1)$$

als eine Summe von Eigenformen der Amplitude  $\hat{w}_{jk}$ , die in jeweils in  $x$ - und  $y$ -Richtung  $j$  bzw.  $k$  Sinuswellen darstellen [45].

Mit der bekannten Bewegungsform kann die homogene partielle Differentialgleichung für die Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{jk}$  analytisch gelöst werden (vgl. [45])

$$\omega_{jk} = \pi^2 \left( \frac{j^2}{l_x^2} + \frac{k^2}{l_y^2} \right) \sqrt{\frac{B_{Pl}}{\rho h}} \quad (5.2)$$

mit  $B_{Pl}$  Biegesteifigkeit der Platte und  $\rho$  Dichte von Aluminium.

Um ein äquivalent wirkendes, diskretes Mehr-Freiheitsgrad-System zu erstellen, wird die Platte mit der Finiten-Elemente-Methode in MSC.NASTRAN modelliert. Sie besteht ausschließlich aus quadratisch dimensionierten CQUAD4-Plattenelementen.

Diskretisierungsfehler infolge der Modellierung als diskretes Mehr-Freiheitsgrad-System müssen vor der Weiterverwendung des FE-Rechenmodells minimiert werden, weshalb eine Konvergenzstudie durchgeführt werden muss. Sie werden anhand der Eigenkreisfrequenzen  $\omega_0$  bzw. Eigenfrequenzen  $f_0$ , welche sich als Lösungen des quadratischen Eigenwertproblems ungedämpfter Systeme ergeben und sehr empfindlich gegenüber Änderungen in der Steifigkeits- und Massenverteilung sind, abgeschätzt. Sie werden nicht anhand der Eigenvektoren abgeschätzt, weil diese sich bei feiner Diskretisierung, aber gleich bleibender Elementformulierung nur sehr schwach ändern und deshalb nicht empfindlich genug sind.

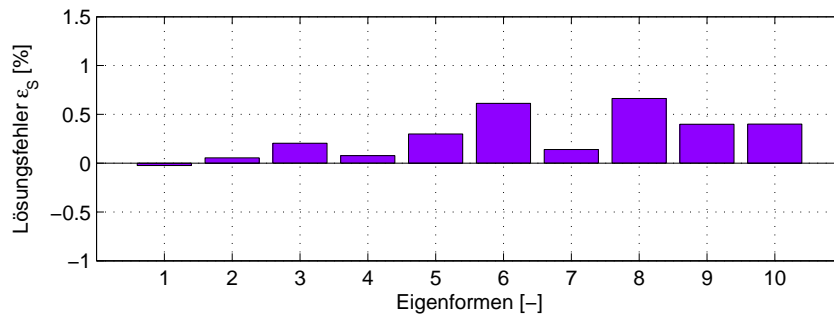


Abbildung 5.2.: Lösungsfehler

Eine konvergierte Steifigkeits- und Massenverteilung ist wichtig für den Einsatz zur Modellierung von globalen Proportionaldämpfungsmodellen, da Dämpfung oft steifigkeits-, massen- oder frequenzabhängig modelliert wird.

Da eine analytische Lösung als Zielvorgabe bekannt ist, kann direkt ein Lösungsfehler  $\varepsilon_S$  angegeben werden, der beim konvergierten Modell für die Eigenfrequenzen  $f_0$  der ersten 10 Eigenformen deutlich unter 1 % liegen sollte.

$$\varepsilon_S = \frac{f_{0,FE} - f_{0,Kont}}{f_{0,Kont}} \quad (5.3)$$

Das konvergierte Modell ist in [Abb. 5.1b](#) dargestellt. Es besteht aus 32 mal 40 CQUAD4-Plattenelementen und besitzt 6527 Knoten. Der endgültige Lösungsfehler ist in [Abb. 5.2](#) dargestellt und beträgt für 8 der 10 ersten Eigenformen unter 0,5 %.

Für die weitere Untersuchung wird die Platte gemäß [Abb. 5.1a](#) in zwei nicht kongruente Substrukturen A und B aufgeteilt. Die Platte ist so im FE-Modell elementiert, dass Knoten direkt auf der Übergangsgrenze von A zu B liegen und so eine Auftrennung der Platte bequem möglich ist.

## 5.2. Kopplung proportional gedämpfter Substrukturen

In diesem Abschnitt wird die verwendeten Dämpfungsmodelle und der Prozess zur Kopplung der fest definierten Substrukturen A und B erläutert.

Das Programm MSC.NASTRAN wird ab diesem Punkt für die weitere Untersuchung nicht mehr benutzt. Das Programm

- ist in der Lage, Substrukturen (*Superelements*) zu definieren und eine Kopplung von Substrukturen durchzuführen, führt aber zwingend vor einer Kopplung eine dynamische Reduktion der Freiheitsgrade mittels *Component Mode Synthesis* (dt.: Synthese der

Komponenteneigenformen, Abk. CMS) durch. Eine Kondensation soll aber vermieden werden, um eine möglichst hohe Genauigkeit der Rechnungen sicherzustellen.

- besitzt für die Modellierung von Dämpfung in Gruppen oder Substrukturen zu eingeschränkte Möglichkeiten. Es kann einer Gruppe von Elementen strukturelle Verlustfaktoren  $g_{s,s}$  zuweisen, kann ihr aber keine viskosen Verlustfaktoren  $g_{m,v}$  oder  $g_{s,v}$  zuweisen.
- kann reelle Eigenwertsensitivitäten mittels der Methode von FOX und KAPOOR [14] (siehe Gl. (4.7) in Kap. 4.2) berechnen, ist aber nicht in der Lage, komplexe Eigenwertsensitivitäten zu berechnen.

Aus diesem Grund werden die Massen- und Steifkeitsmatrizen  $[M_A]$ ,  $[M_B]$ ,  $[K_A]$  und  $[K_B]$  der Substrukturen sowie eine tabellarische Zuordnung von Knotennummer und Freiheitsgrad zur entsprechenden Matrixzeile/-spalte aus MSC.NASTRAN exportiert. Sie werden in MATLAB, das für die weitere Untersuchung ausschließlich verwendet wird, importiert und dort weiter verwendet.

MATLAB bietet umfangreiche Funktionen im Bereich Lineare Algebra, um schnell und bequem Matrizen zu erstellen und Eigenwertprobleme zu lösen. MATLAB unterscheidet sich zu MSC.NASTRAN insbesondere im iterativen Verfahren zur Bestimmung von Eigenwerten. Es verwendet das ARNOLDI-Verfahren, während MSC.NASTRAN das LANCZOS-Verfahren nutzt.

Um die Substrukturen mit Proportionaldämpfung zu versehen, muss für jede Substruktur A und B jeweils eine proportionale physikalische Dämpfungsmatrix  $[D_A]$  und  $[D_B]$  bzw.  $[C_A]$  und  $[C_B]$  berechnet werden.

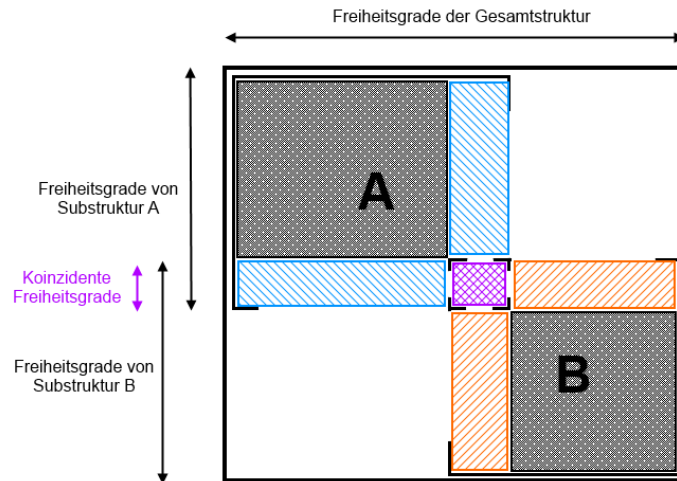
RAYLEIGH-Dämpfung ist eine proportionale viskose Formulierung und berechnet die Dämpfungsmatrix zu  $g_{s,v}[K] + g_{m,v}[M] = [D]$ . Sie ist je Substruktur abhängig von den zwei Verlustfaktoren  $g_{s,v}$  und  $g_{m,v}$ .

Bei steifigkeitsproportionaler struktureller Dämpfung wird die Dämpfungsmatrix mit  $g_{s,s}[K] = [C]$  berechnet. Sie ist je Substruktur abhängig von nur einem Verlustfaktor  $g_{s,s}$ .

Die in Kap. 2.3.3 vorgestellten modalen viskosen und strukturellen Dämpfungsmodelle sind von den modalen Dämpfungsmaßen  $D_{gen}$  der Eigenformen abhängig, besitzen also beliebig viele einstellbare Dämpfungsparameter. Sie werden für die computergestützte Modellanpassung nicht weiter betrachtet, weil die modalen Dämpfungsmaße  $D_{gen}$  in der Regel aus experimentellen Modalanalysen der Struktur kommen und daher ohne Veränderung berücksichtigt werden. Außerdem haben sie den Nachteil, dass sie ausschließlich die durch  $D_{gen}$  explizit gedämpften Eigenformen dämpfen und keine Extrapolation des Dämpfungsverhaltens außerhalb des betrachteten Frequenzbereichs erlauben.

Nach der Berechnung der proportionalen Dämpfungsmatrizen  $[D_A]$  und  $[D_B]$  bzw.  $[C_A]$  und  $[C_B]$  muss eine Kopplung der Substruktur-Systemmatrizen vorgenommen werden. Im Falle der vorliegenden Struktur, bei der die Gesamtstruktur und auch die Substrukturen für sich statisch





**Abbildung 5.3.:** Abstrahierte Darstellung zur Kopplung der Substrukturmatrizen

bestimmt gelagert sind und die Substrukturen starr verbunden sind, ist das Kopplungsvorgehen für alle drei Systemmatrizen gleich und wird im Folgenden kurz erläutert.

In Abb. 5.3 ist die Kopplungssystematik abstrahiert dargestellt. Matrixeinträge von Knoten, die ausschließlich zu Substruktur A oder ausschließlich zu Substruktur B gehören oder Kopplungen innerhalb der beiden Substrukturen beschreiben, sind schwarz dargestellt und werden ohne Veränderung in die Gesamtsystemmatrix eingeordnet. Einträge, die Kopplungen von Freiheitsgraden der Substruktur A mit Freiheitsgraden der Übergänge von A zu B beschreiben, sind blau dargestellt und werden ebenfalls ohne Veränderung eingeordnet. Das gleiche geschieht mit Einträgen, die die Substruktur B und den Übergang von B zu A betreffen. Sie sind orange dargestellt. Einträge beider Substrukturen von Knoten, die am Übergang von A zu B liegen oder Kopplungen zwischen den Freiheitsgraden der Übergangsknoten beschreiben und die bei der Gesamtstruktur koinzident sind, werden jeweils addiert und eingetragen. Sie sind violett gekennzeichnet.

Die proportionalen Substruktur-Dämpfungsmatrizen ergeben gekoppelt eine nichtproportionale Gesamtstruktur-Dämpfungsmatrix  $[D]$  bzw.  $[C]$ .

Mithilfe der Gesamtsystemmatrizen kann das homogene diskretisierte Bewegungsdifferentialgleichungssystem eines allgemein viskos (siehe Gl. (2.73)) bzw. strukturell gedämpften Systems (siehe Gl. (2.88)) aufgestellt werden. Zur Lösung des viskos gedämpften Problems wird die Bewegungsdifferentialgleichung Gl. (2.88) gemäß Kap. 2.4 in den Zustandsraum in die linearisierte Begleitform Gl. (2.75c) überführt.

Das daraus folgende generalisierte Eigenwertproblem kann dann in MATLAB numerisch gelöst werden und ergibt entsprechend des Dämpfungstyps eine Zahl an komplexen Eigenvektoren  $\{\psi\}$  und Eigenwerten  $\lambda$ , aus denen je nach Dämpfungstyp die modalen Dämpfungsmaße  $D$  der Gesamtstruktur berechnet werden können.

### 5.3. Computergestützte Modellanpassung

Mit dem festgelegten mathematischen Modell wird im Folgenden die Sensitivität der komplexen Eigenwerte der gedämpften Gesamtstruktur gegenüber eine Änderung der Verlustfaktoren  $g$  der Substrukturen untersucht und eine Modellanpassung im konsistenten und inkonsistenten Fall getestet.

#### 5.3.1. Untersuchung der Sensitivität

Das erläuterte Vorgehen in Kap. 5.2 ist Bestandteil des Prozesses, um die komplexe Eigenwertsensitivität bezüglich proportionaler Verlustfaktoren  $g$  zu berechnen. Für beliebige Verlustfaktoren  $g$  ermöglicht es die Berechnung der nichtproportionalen Gesamtstruktur-Dämpfungsmatrix  $[D]$  bzw.  $[C]$ , globaler komplexer Eigenwerte  $\lambda$  und komplexer Eigenvektoren  $\{\psi\}$ , solange die Substrukturen beide rein viskos oder rein strukturell gedämpft sind.

Um die Sensitivität zu bestimmen, wird zuerst ein infinitesimal kleines  $\partial g$  auf einen einzigen  $g_j$  hinzuaddiert. Mit diesem veränderten Wert  $\bar{g}_j = g_j + \partial g$  wird eine veränderte Gesamtstruktur-Dämpfungsmatrix  $[\bar{D}]$  bzw.  $[\bar{C}]$  berechnet.

Zur weiteren Verfahrensweise gibt es zwei Wege, die Eigenwertsensitivität zu berechnen: das Finite-Differenzen-Verfahren und das analytische Verfahren gemäß Kap. 4.2.

Beim Finite-Differenzen-Verfahren wird mit der veränderten Dämpfungsmatrix  $[\bar{D}]$  bzw.  $[\bar{C}]$  das Eigenwertproblem erneut aufgestellt und gelöst. Es liefert dann Eigenwerte  $\bar{\lambda}$ , die zur Berechnung der Eigenwertsensitivität genutzt werden kann.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial g_j} \approx \frac{\Delta \lambda}{\Delta g_j} = \frac{\bar{\lambda} - \lambda}{\partial g_j} \quad (5.4)$$

Diese Methode hat den Nachteil, dass für jeden veränderten Verlustfaktor  $g$  das Eigenwertproblem neu gelöst werden muss, was vor allem bei Systemen mit einer hohen Zahl an Freiheitsgraden sehr rechenintensiv und zeitaufwändig ist.

Beim analytischen Verfahren wird je nach Dämpfungstyp mit der veränderten Dämpfungsmatrix  $[\bar{D}]$  bzw.  $[\bar{C}]$

$$\frac{\partial [D]}{\partial g_j} = \frac{[\bar{D}] - [D]}{\partial g_j} \quad (5.5a)$$

$$\frac{\partial [K^c]}{\partial g_j} = \frac{[\bar{C}] - [C]}{\partial g_j} \quad (5.5b)$$

bestimmt. Diese Matrizen, der  $k$ -te komplexe Eigenwerte  $\lambda_k$ , der zugehörige  $k$ -te komplexe Eigenvektor  $\{\psi_k\}$  und die Gesamtstruktur-Massen- und -Steifigkeitsmatrizen  $[M]$  und  $[K]$

## Proportionale Verlustfaktoren für Substruktur

Dämpfungsmodellierung	A	...	B
RAYLEIGH-Dämpfung	$g_{m,v,A} = 28, 19,$ $g_{s,v,A} = 2, 11 \cdot 10^{-5}$		$g_{m,v,B} = 35, 24,$ $g_{s,v,B} = 2, 64 \cdot 10^{-5}$
Strukturelle Dämpfung	$g_{s,s,A} = 0, 08$		$g_{s,s,A} = 0, 1$

Tabelle 5.2.: Verlustfaktoren  $g$  des Beispiels

werden in die analytische Lösung in Gl. (4.9) bzw. Gl. (4.10) eingesetzt.

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial g_j} = \lambda_k \frac{\{\psi_k\}^\top \left( \lambda_k \frac{\partial [D]}{\partial g_j} \right) \{\psi_k\}}{\{\psi_k\}^\top (-\lambda_k^2 [M] + [K]) \{\psi_k\}} \quad (5.6a)$$

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial g_j} = \lambda_k \frac{\{\psi_k\}^\top \left( \frac{\partial [K^c]}{\partial g_j} \right) \{\psi_k\}}{\{\psi_k\}^\top (-\lambda_k^2 [M] + [K^c]) \{\psi_k\}} \quad (5.6b)$$

Diese Methode spart besonders bei vielen Substrukturen und Verlustfaktoren  $g$  Rechenzeit und -kraft und kann auch für große Systeme angewandt werden.

Als demonstratives Beispiel werden die komplexen Eigenwerte der Platte und die Sensitivität der komplexen Eigenwerte der ersten zehn Eigenformen für Substrukturen mit RAYLEIGH-Dämpfung und Substrukturen mit struktureller Dämpfung berechnet. Sie werden mit willkürlich ausgewählten Werte für die Verlustfaktoren  $g$ , die in Tab. 5.2 aufgelistet sind, errechnet. Die Verlustfaktoren  $g$  werden jeweils um  $\partial g = 0,001\%$   $g$  variiert.

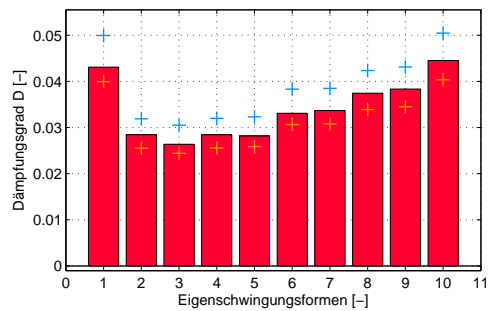
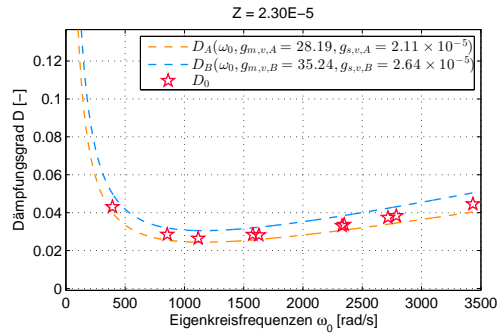
Die erhaltenen komplexen Eigenwerte für den Fall der RAYLEIGH-Dämpfung sind in Abb. 5.4a in Form von modalen Eigenschaften dargestellt. Die Darstellung zeigt die globalen modalen Dämpfungsmaße  $D_{gen}$  als rot markierte Datenpunkte, aufgetragen über der Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$ , und als Balken je Eigenform. Der proportionale Zusammenhang von Dämpfungsgrad und Eigenkreisfrequenz ist für jede Substruktur als oranger bzw. blauer Graph abgebildet.

Die Diagramme zeigen, dass die globalen modalen Dämpfungsmaße  $D_{gen}$  der Gesamtstruktur zwischen jenen modalen Dämpfungsmaßen liegen, die die Eigenformen der Substrukturen an der jeweiligen Kreisfrequenz besitzen würden. Sie zeigen außerdem, dass die globalen modalen Dämpfungsmaße keine quadratische Abhängigkeit von der Kreisfrequenz haben, sondern tendenziell höher oder niedriger ausfallen, je nach Dominanz der jeweiligen Substruktur an der Eigenform der Gesamtstruktur.

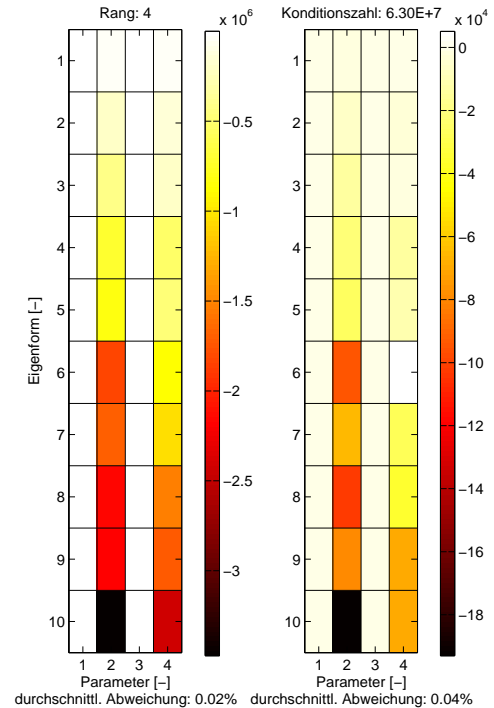
Die analytisch errechnete komplexe Sensitivitätsmatrix

$$[G_\lambda] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial g_{m,v,A}} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial g_{s,v,A}} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial g_{m,v,B}} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial g_{s,v,B}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \lambda_{10}}{\partial g_{m,v,A}} & \frac{\partial \lambda_{10}}{\partial g_{s,v,A}} & \frac{\partial \lambda_{10}}{\partial g_{m,v,B}} & \frac{\partial \lambda_{10}}{\partial g_{s,v,B}} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

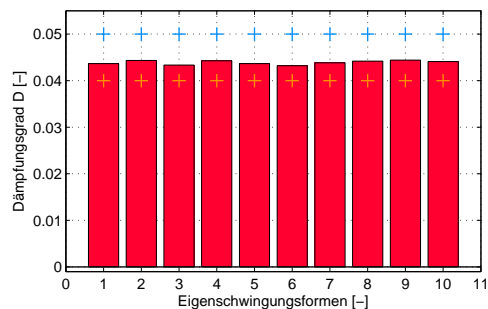
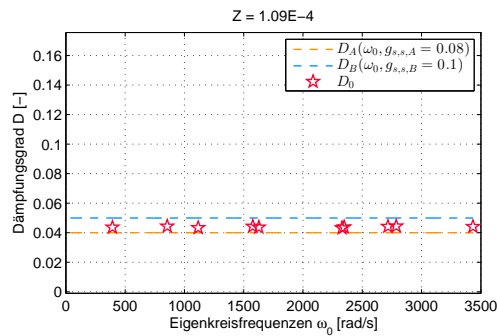
ist in Abb. 5.4b dargestellt, aufgeteilt in Realteil und Imaginärteil. Sie wurde ausschließlich mit den Eigenwerten mit  $\Im(\lambda) > 0$  von den komplex konjugierten Eigenwertpaaren  $\lambda_{k1/k2}$



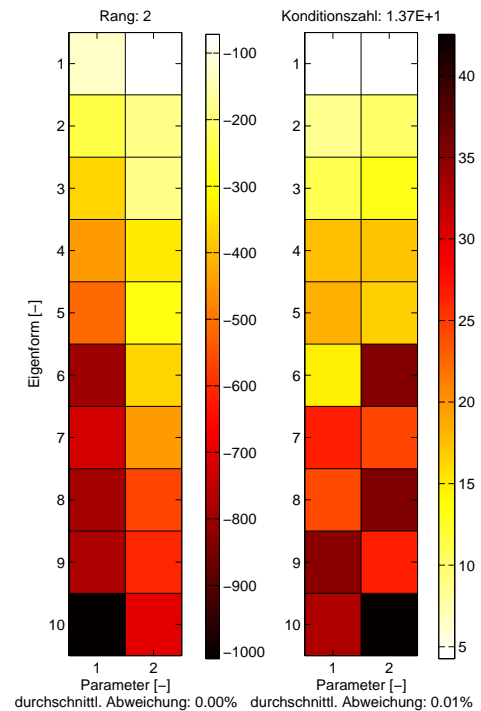
(a) Modale Dämpfungsmaße über Eigenkreisfrequenz und je Eigenform



(b) Komplexe Sensitivitätsmatrix  $G_\lambda$  (links Realteil, rechts Imaginärteil)



(c) Modale Dämpfungsmaße über Eigenkreisfrequenz und je Eigenform



(d) Komplexe Sensitivitätsmatrix  $G_\lambda$  (links Realteil, rechts Imaginärteil)

**Abbildung 5.4.:** Lösung des Eigenwertproblems der Platte und Sensitivitätsmatrix bei RAYLEIGH-Dämpfung (oben) und bei struktureller Dämpfung (unten) mit Verlustfaktoren aus Tab. 5.2

berechnet. Sie wurde ebenfalls mit Finite-Differenzen-Verfahren berechnet, sie ist aber nicht dargestellt, da die durchschnittliche Abweichung von den analytisch berechneten Werten sehr klein ist.

Der Realteil der Sensitivitätsmatrix zeigt an, dass sich der Realteil aller Eigenwerte  $\lambda$  bei einer Erhöhung eines beliebigen Koeffizienten  $g$  verringert. Bei stabilen mechanischen Systemen wie der Platte ist  $\Re(\lambda) = -D_{gen}\omega_0 < 0$ , sodass diese Beobachtung ein Wachstum von  $D_{gen}$  bedeutet. Dieses Wachstum ist besonders bei den steifigkeitsproportionalen viskosen Verlustfaktoren  $g_{s,v}$  sehr stark und wird mit steigender Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  absolut stärker. Das Wachstum ist bei den massenproportionalen viskosen Verlustfaktoren  $g_{m,v}$  entsprechend der Formulierung bei steigender Frequenz absolut schwächer, aber nirgends Null, erkennbar an der Skala.

Der Realteil zeigt außerdem, dass eine Erhöhung der Verlustfaktoren  $g$  der geometrisch größeren Substruktur A ein stärkeres Wachstum der modalen Dämpfungsgrade  $D_{gen}$  bewirkt als eine prozentual gleiche Erhöhung der Verlustfaktoren  $g$  der geometrisch kleineren Substruktur B.

Die Darstellung der Imaginärteil-Sensitivitäten zeigt die gleiche Information wie der Realteil, nämlich eine Verringerung der Kreisfrequenz  $\omega$  infolge der erhöhten Dämpfung. Auffällig ist, dass sie bei der Eigenwertsensitivität der Verlustfaktoren von Substruktur B bei der 6. Eigenform eine Erhöhung des Imaginärteils errechnet, während der Realteil sinkt. Dies ist nicht plausibel und auf die begrenzte Genauigkeit der analytischen Berechnung zurückzuführen, da in Gl. (5.6a) die Änderung der Dämpfungsmatrix  $[D]$  mit der Finite-Differenzen-Methode und nicht analytisch berechnet wird.

Die Sensitivitätsmatrix hat vollen Rang, sodass sie pseudo-invertierbar ist und für eine computergestützte Modellanpassung verwendet werden darf.

Die Konditionszahl der Sensitivitätsmatrix  $\kappa_G = \|[G_\lambda]\|_2$  ist die Spektralnorm der Matrix und gibt das Verhältnis des größten zum kleinsten Matrixelements wieder. Sie ist ein Maß dafür, wie exakt eine numerische Inversion oder Pseudo-Inversion der Matrix ist. Die Konditionszahl  $\kappa_G$  ist in diesem Fall klein genug, um eine numerische Pseudo-Inversion von  $[G_\lambda]$  ohne großen Fehler durchzuführen.

Die erhaltenen komplexen Eigenwerte für den Fall der strukturellen Dämpfung sind in [Abb. 5.4c](#) in Form von modalen Eigenschaften als Graph und als Balkendiagramm dargestellt.

Die Diagramme zeigen auch hier, dass die globalen modalen Dämpfungsmaße  $D_{gen}$  der Gesamtstruktur zwischen jenen modalen Dämpfungsmaßen liegen, die die Substruktur-Eigenformen an der jeweiligen Kreisfrequenz besitzen würden. Sie zeigen ebenfalls, dass sie tendenziell höher oder niedriger ausfallen, je nach Dominanz der jeweiligen Substruktur an der Eigenform der Gesamtstruktur.

Die analytisch errechnete komplexe Sensitivitätsmatrix

$$[G_\lambda] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial g_{s,s,A}} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial g_{s,s,B}} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \lambda_{10}}{\partial g_{s,s,A}} & \frac{\partial \lambda_{10}}{\partial g_{s,s,B}} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

ist in Abb. 5.4d dargestellt, aufgeteilt in Realteil und Imaginärteil. Sie wurde ausschließlich mit den Eigenwerten  $\lambda = +i\omega_0\sqrt{1 + i g_{s,s}}$  von den komplexen Eigenwertpaaren  $\lambda_{k1/k2}$  berechnet. Sie unterscheidet sich bei analytischer Berechnung in ihren Matrixelementen genauso schwach von den Matrixelementen bei Finite-Differenzen-Berechnung wie bei der RAYLEIGH-Dämpfung, wie in der Abbildung vermerkt ist.

Zur Betrachtung des Sensitivitätsverhaltens hilft eine grobe Hilfsgleichung, die bei schwach gedämpfte Systemen anwendbar ist und die Eigenwerte  $\lambda$  etwas greifbarer macht.

$$\lambda = +i\omega_0\sqrt{1 + i2D_{gen}} \approx -D_{gen}\omega_0 + i(\omega_0 + 4D_{gen}^2) \quad (5.9)$$

Die Sensitivitätsmatrix zeigt, dass mit steigendem strukturellem Verlustfaktor  $g_{s,s}$  entsprechend der Hilfsgleichung der Realteil  $\Re(\lambda) < 0$  weiter sinkt und der Imaginärteil  $\Im(\lambda) > 0$  wächst. Sie zeigt außerdem, dass sich  $\Re(\lambda)$  und  $\Im(\lambda)$  entsprechend ihrer Abhängigkeit von der Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  für höhere Eigenformen stärker ändern. Weiterhin zeigt sie wie bei der RAYLEIGH-Dämpfung, dass eine Veränderung des Verlustfaktors  $g_{s,s,A}$  der geometrisch größeren Substruktur A stärkeren Einfluss auf die globalen modalen Dämpfungsmaße  $D_{gen}$  hat als eine Veränderung des Verlustfaktors  $g_{s,s,B}$ .

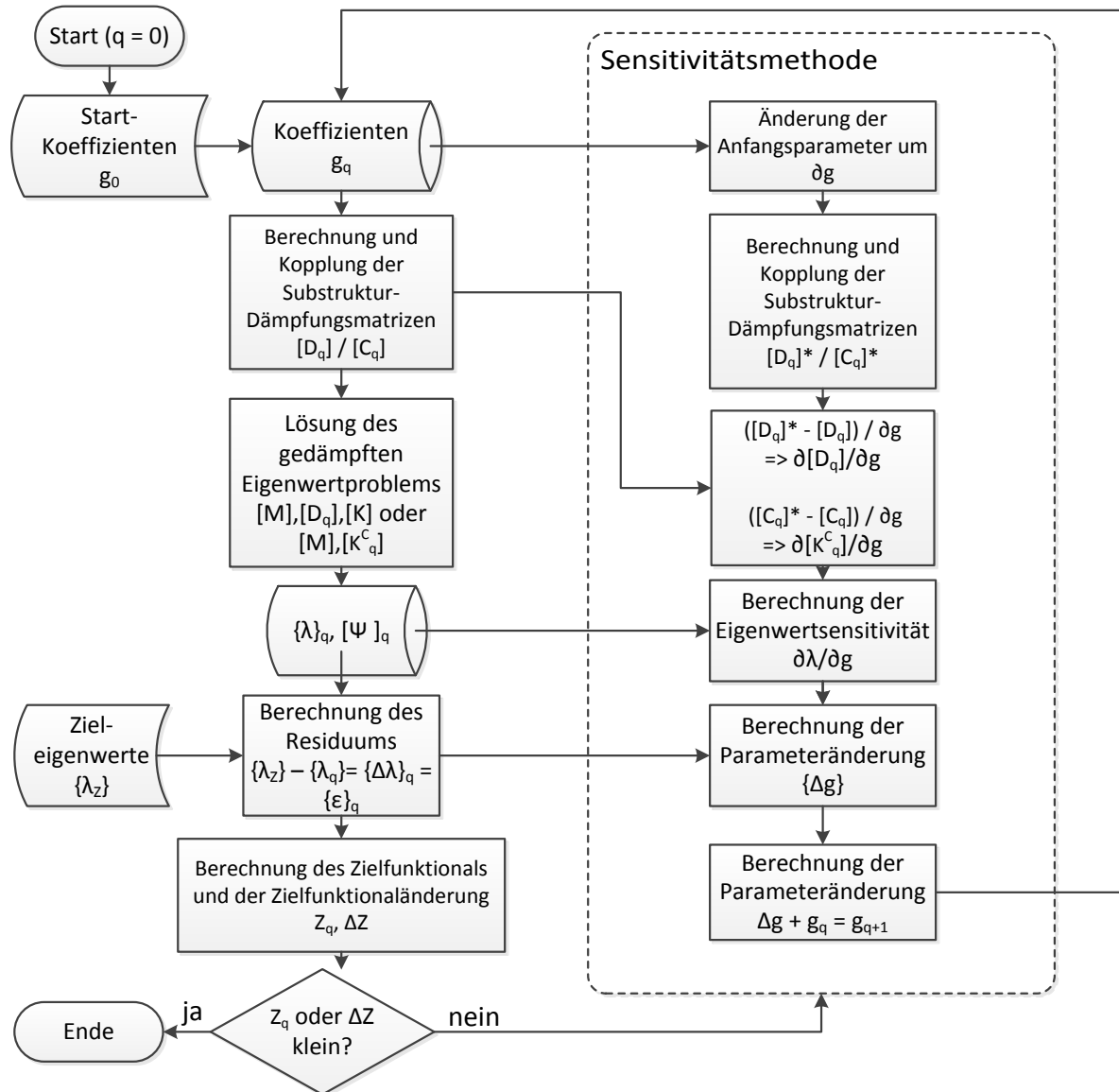
Die Sensitivitätsmatrix hat auch hier vollen Rang, sodass sie invertierbar ist und für eine computergestützte Modellanpassung verwendet werden kann.

### 5.3.2. Automatische Anpassung komplexer Eigenwerte

Mit dem in Kap. 5.2 beschriebenen Vorgehen zur Berechnung von globalen modalen Eigenschaften der Gesamtplatte bei unterschiedlich proportional gedämpften Substrukturen und der in Kap. 5.3.1 erfolgreichen analytisch korrekten Berechnung invertierbarer Sensitivitätsmatrizen  $[G_\lambda]$  kann nun eine automatische Modellanpassung an der Platte getestet werden.

Dazu wurde ein Programm in MATLAB geschrieben. Die Funktionsweise des Programms soll mit dem Flussdiagramm in Abb. 5.5 veranschaulicht werden.

Mit gewählten oder abgeschätzten proportionalen Verlustfaktoren  $g_0 = g_v$  oder  $g_0 = g_s$  der Substrukturen wird ein aktueller Satz an modalen Eigenschaften  $\{\lambda\}_{q=0}$  und die zugehörigen Eigenvektoren  $[\Psi]_q$  der Gesamtstruktur gemäß Kap. 5.2 errechnet. Der aktuelle Satz an Eigenwerten  $\{\lambda\}_q$  wird mit dem Satz an Zieleigenwerten  $\{\lambda_Z\}$  verglichen, wobei die Differenz  $\{\Delta\lambda\}_q = \{\lambda_Z\} - \{\lambda\}_q$  das aktuelle Residuum  $\{\varepsilon\}_q$  darstellt. Mit dem Residuum wird das Zielfunktional  $Z_{\lambda,q}$  gemäß Gl. (4.1) errechnet.



**Abbildung 5.5.:** Flussdiagramm zur Umsetzung der computergestützten automatischen Modellangepassung

Für die Errechnung des Zielfunktional  $Z_\lambda$  wird eine Wichtungsmatrix  $[W_\varepsilon]$  eingeführt, um die Abhängigkeit der Eigenwerte  $\lambda$  und folglich auch der Residuen  $\varepsilon = \Delta\lambda$  von der Eigenkreisfrequenz abzuschwächen.

$$Z_\lambda = \{\varepsilon\}^\top [W_\varepsilon] \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}^\top \begin{bmatrix} |\lambda_1|^{-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & |\lambda_n|^{-2} \end{bmatrix} \{\varepsilon\} \quad (5.10)$$

Eine automatische Abbruchbedingung muss hierbei außerdem berücksichtigen, dass aus  $\Delta\lambda \in \mathbb{C}$  praktisch  $Z_\lambda \in \mathbb{C}$  folgt.

Ist das Zielfunktional  $Z_{\lambda,q}$  zu groß, wird eine Sensitivitätsmatrix  $[G_\lambda]$  gemäß Kap. 5.3.1 auf Basis der aktuellen Verlustfaktors  $g_q$  und der aktuell errechneten modalen Eigenschaften  $\{\lambda\}_q$  und  $[\psi]$  errechnet. Die Sensitivitätsmatrix wird mit einer Pseudo-Inversion zu  $[G_\lambda]^+$  invertiert. Die invertierte Sensitivitätsmatrix ergibt zusammen mit dem Residuum  $\{\Delta\lambda\}_q$  gemäß Gl. (4.5)

$$\{\Delta g\} = [G_\lambda]^+ \{\Delta\lambda\}_q \quad (5.11)$$

$$\{g\}_{q+1} = \{g\}_q + \{\Delta g\} \quad (5.12)$$

eine Änderung  $\Delta g$  und neue Verlustfaktoren  $g_{q+1}$ .

Es muss beachtet werden, dass aus  $[G_\lambda] \in \mathbb{C}$  und  $\Delta\lambda \in \mathbb{C}$  der Zusammenhang  $\Delta g \in \mathbb{C}$  folgt. Allerdings ist die Sensitivitätsmatrix sehr schwach komplex, da nur Systemparameter betrachtet werden, die ausschließlich die Dämpfung und somit immer vorwiegend den Realteil von  $\lambda$  beeinflussen. Das Residuum  $\Delta\lambda$  ist nur dann schwach komplex, wenn das Zielsystem und das Startsystem fast identische Eigenkreisfrequenzen  $\omega_0$  besitzen, sodass  $\Re(\Delta\lambda) \gg \Im(\Delta\lambda)$  gilt. Unter diesen Umständen darf vereinfacht  $\Delta g \approx \Re(\Delta g)$  angenommen werden.

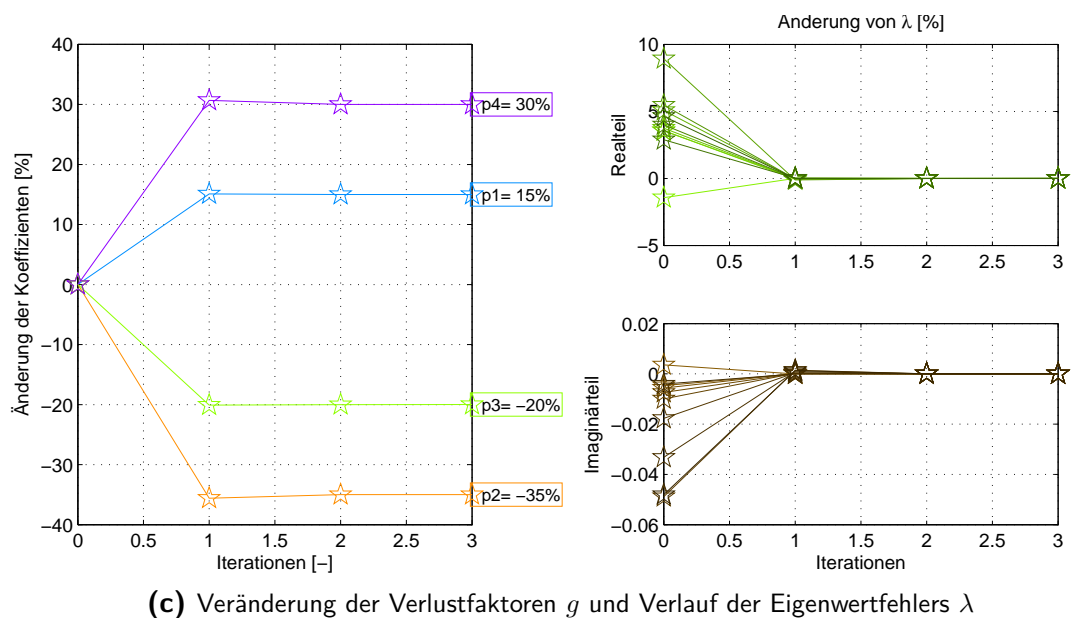
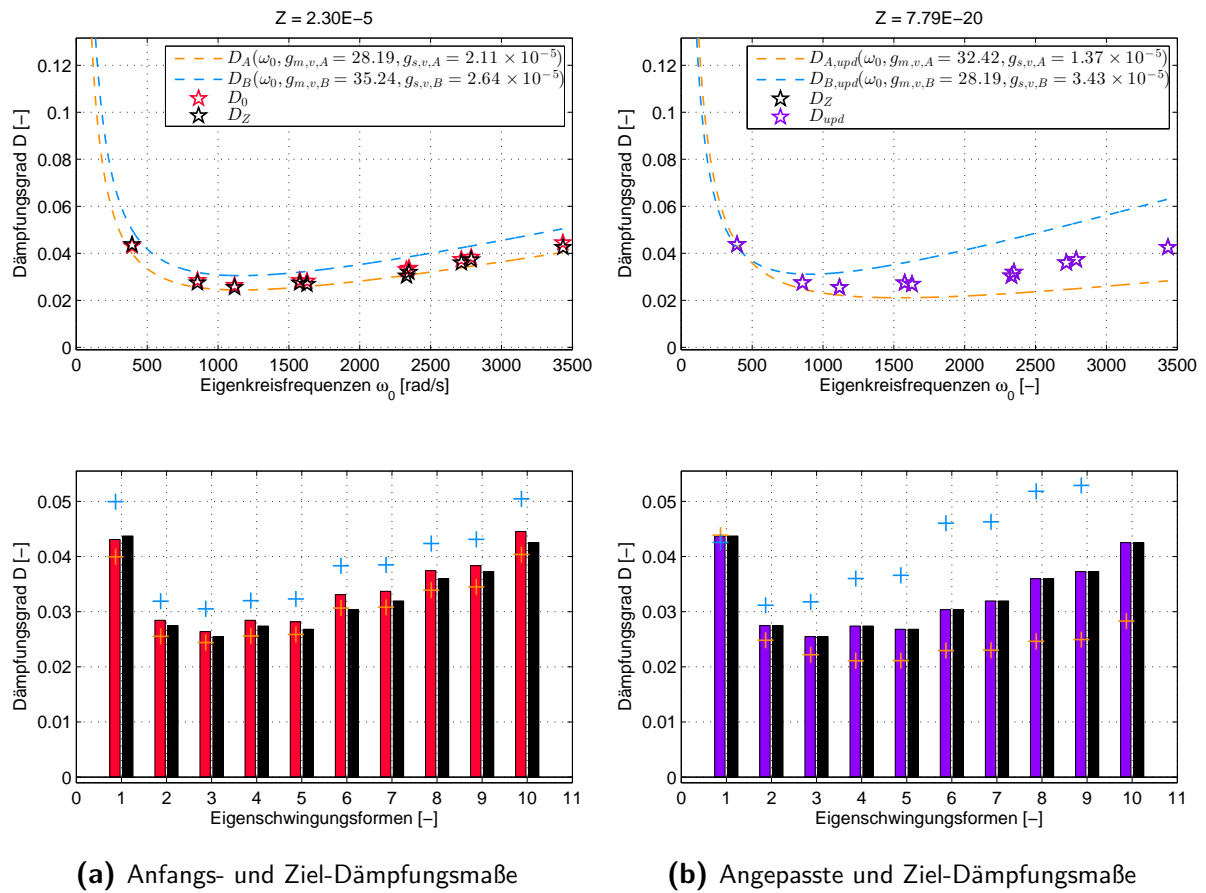
Mit den neuen Koeffizienten  $g_{q+1}$  kann ein neuer aktueller Satz an modalen Eigenschaften errechnet werden. Die neu errechneten Eigenwerte  $\lambda_{q+1}$  ermöglichen dann die Berechnung eines aktuellen Zielfunktional  $Z_{\lambda,q+1}$  und einer prozentualen Zielfunktionaländerung  $\Delta Z = (Z_{\lambda,q+1} - Z_{\lambda,q})/Z_{\lambda,q}$ . Ist eines von beiden klein genug, kann die Modellanpassung beendet werden. Ansonsten kann die Schleife wiederholt werden.

Um die Funktionstüchtigkeit der computergestützten Modellanpassung zu überprüfen, wird ein **Testfall unter konsistenten Fehlerbedingungen** erprobt. Der Testfall setzt ideale Bedingungen voraus. Das bedeutet, dass die Differenz zwischen simulierten Zieleigenwerten  $\{\lambda_Z\}$  und den Starteigenwerten  $\{\lambda\}_{q=0}$  nur von den Verlustfaktoren  $g$  abhängig ist und der Fehler  $\varepsilon$  durch geeignete Veränderung der Verlustfaktoren  $g$  zu  $\{0\}$  verschwindet.

Entsprechend simulierte Zieleigenwerte  $\lambda_Z$  werden erzeugt, indem willkürliche gewählte Verlustfaktoren  $g$ , bspw. aus Tab. 5.2, mit einem prozentualen Fehler versehen und zur Lösung des Eigenwertproblems verwendet werden.

In Abb. 5.6 sind wichtige modale Eigenschaften und Zusammenhänge vor, während und nach zweier iterativer Modellanpassungsläufe dargestellt, wobei die Substrukturen der Platte mit RAYLEIGH-Dämpfung versehen bzw. mit struktureller Dämpfung versehen sind.





**Abbildung 5.6.:** Computergestützte Modellanpassung komplexer Eigenwerte der Platte bei RAYLEIGH-Dämpfung, konsistenter Fall

In [Abb. 5.6a](#) sind die globalen modalen Dämpfungsmaße  $D_0$  der ersten 10 Platteneigenformen in rot und auch der Zusammenhang von Dämpfungsgrad und Eigenkreisfrequenz je Substruktur in orange und blau wie bei [Abb. 5.4a](#) dargestellt. Die globalen modalen Ziel-Dämpfungsmaße  $D_Z$  der 10 Eigenformen sind als schwarze Datenpunkte und als schwarze Balken dargestellt. In [Abb. 5.6a](#) sind die Ziel-Dämpfungsmaße ebenfalls abgebildet. Zusätzlich sind die modalen globalen Dämpfungsmaße  $D_{upd}$  des angepassten Systems in violett dargestellt. Die veränderten Zusammenhänge von Dämpfungsgrad und Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  je Substruktur sind für die veränderten Verlustfaktoren  $g_{upd}$  ebenfalls, erneut in blau und orange, dargestellt.

Der Unterschied zwischen den ursprünglichen Dämpfungsmaßen  $D_0$  und den Ziel-Dämpfungsmaße  $D_Z$  vor der computergestützten Modellanpassung ist nach 3 Iterationen visuell auf 0 gesunken. Das Zielfunktional ist auf einen Bruchteil des Anfangswertes gesunken. Die Verlustfaktoren  $g$  sind alle verändert.

In [Abb. 5.6c](#) ist die Veränderung der Start-Verlustfaktoren  $p_1 = g_{m,v,A}$ ,  $p_2 = g_{s,v,A}$ ,  $p_3 = g_{m,v,B}$  und  $p_4 = g_{s,v,B}$  graphisch dargestellt. Sie zeigt, dass sie sich genau um den prozentualen Anteil, um den sie zur Berechnung der Ziel-Eigenwerte  $\lambda_Z$  beaufschlagt wurden, verändert haben. Zusätzlich ist der Verlauf der prozentualen Differenz zwischen Real- bzw. Imaginärteil der Start- und Ziel-Eigenwerte dargestellt. Die Differenz ist dabei auf nahe 0 % gesunken.

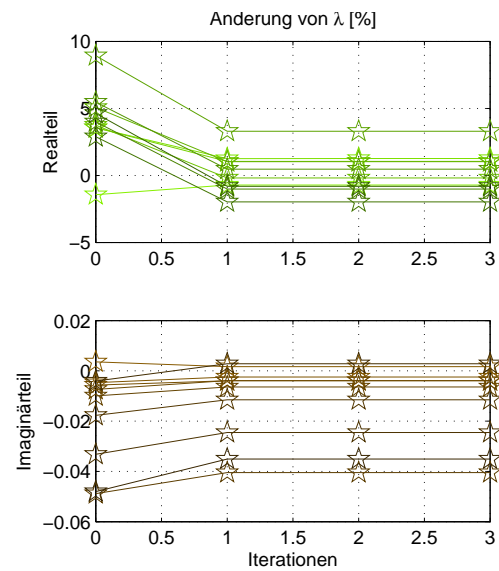
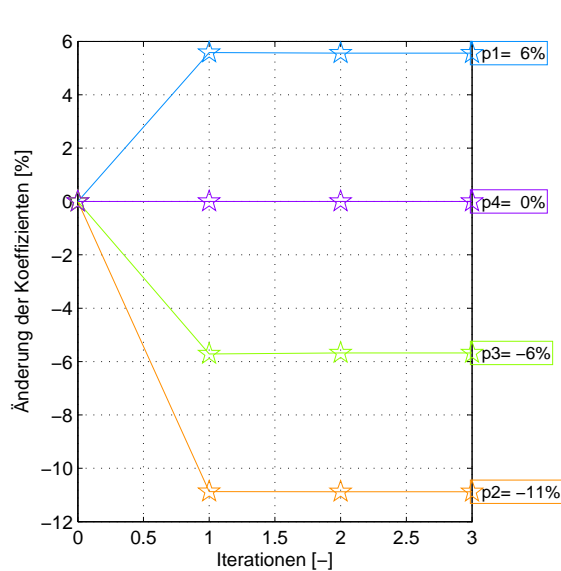
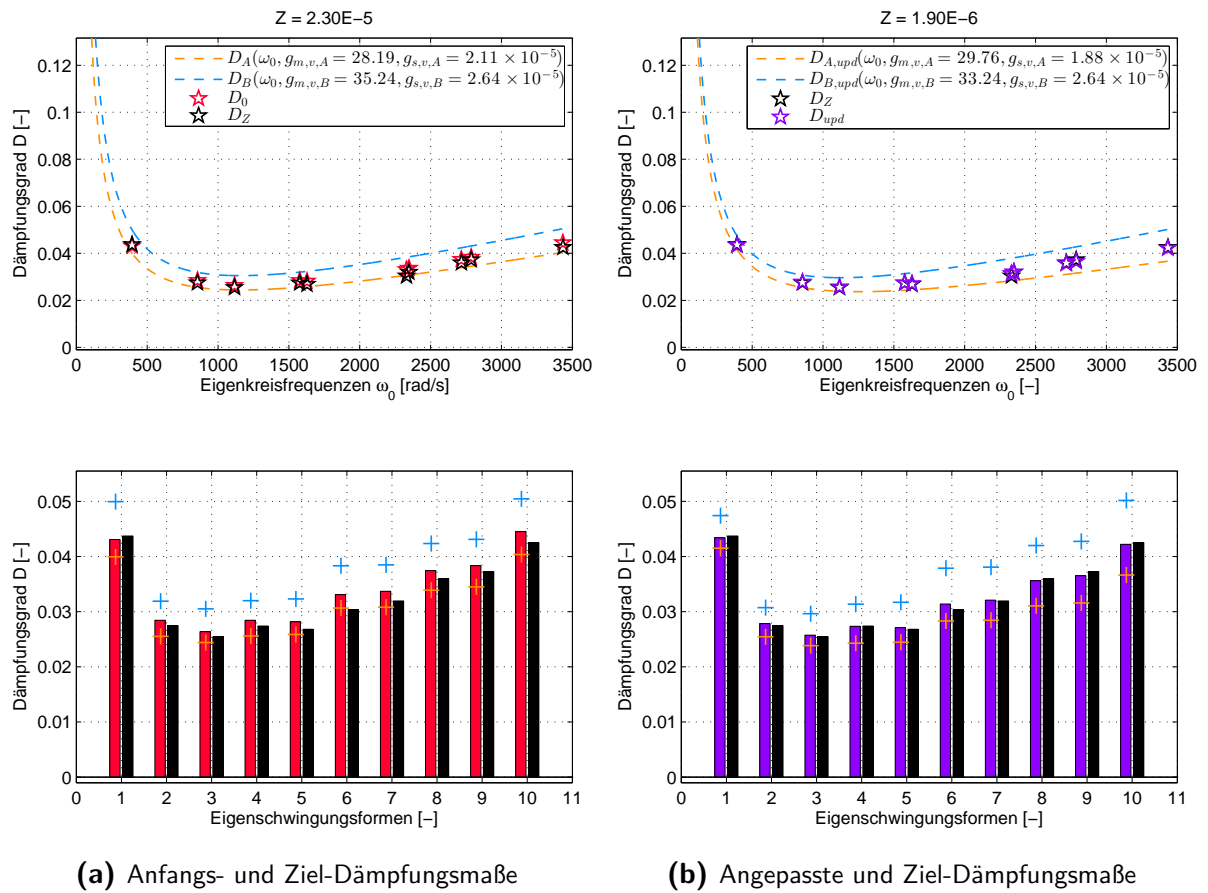
Um die Robustheit der computergestützten Modellanpassung zu erproben, wird ein **Testfall unter inkonsistenten Bedingungen** durchgespielt. Der Unterschied zum konsistenten Fall besteht ausschließlich darin, dass nicht alle Verlustfaktoren  $g$ , die gegenüber der Ziellösung fehlerbehaftet sind, zur Änderung freigegeben sind. Der Fehler wird also minimiert, kann aber nicht 0 werden.

In [Abb. 5.7](#) sind die ursprünglichen und im Laufe der computergestützten Modellanpassung veränderten modalen Eigenschaften und Korrekturparameter  $g$  dargestellt, wobei  $p_4 = g_{s,v,B}$  nicht zur Anpassung freigegeben ist.

[Abb. 5.7a](#) stellt exakt den gleichen Zusammenhang wie [Abb. 5.6a](#) dar, da exakt die gleichen Startbedingungen wie beim konsistenten Fall gestellt sind. [Abb. 5.7b](#) zeigt die veränderten modalen Dämpfungsmaße nach der Modellanpassung. Sie lässt visuell im Balkendiagramm und zahlenmäßig durch die Reduktion des Zielfunktionals  $Z$  um 90 % erkennen, dass die Differenz zu den Ziel-Dämpfungsmaßen reduziert, aber nicht verschwunden ist.

In [Abb. 5.6c](#) ist die Veränderung der Start-Verlustfaktoren dargestellt. Sie zeigt, dass die 3 zur Modellanpassung freigegebenen Verlustfaktoren  $g$  sich nach den Iterationen nicht um den prozentualen Anteil verändert haben, um den sie zur Berechnung der Ziel-Eigenwerte  $\{\lambda_Z\}$  beaufschlagt wurden. Die Verlustfaktoren haben stattdessen Werte angenommen, mit denen die Residuen mathematisch minimiert werden. Entsprechend zeigt sich auch eine Verringerung der prozentualen Differenz der Real- und Imaginärteile der komplexen Eigenwerte  $\{\lambda\}$  zu  $\{\lambda_Z\}$ , die aber nicht für alle Eigenwerte 0 wird.

Der konsistente Fall und der inkonsistente Fall zeigen, dass die Modellanpassung unter den gegebenen Umständen funktionstüchtig und robust funktioniert. Beide Fälle wurden auch für

(c) Veränderung der Verlustfaktoren  $g$  und Verlauf der Eigenwertfehlers  $\lambda$ **Abbildung 5.7.:** Computergestützte Modellanpassung komplexer Eigenwerte der Platte bei RAYLEIGH-Dämpfung, inkonsistenter Fall

strukturelle Verlustfaktoren  $g_{s,s}$  durchgeführt und sind im Anhang in Kap. A.2 zu finden.

## 5.4. Bewertung des Verfahrens und der Ergebnisse

Die Sensitivität komplexer globaler Eigenwerte einer Struktur gegenüber einer Veränderung der Verlustfaktoren  $g$  der Substrukturen wurde in Kap. 5.3.1 untersucht. Die Sensitivitätsmatrix  $[G_\lambda]$  kann mit großer Genauigkeit analytisch für rein viskose und rein strukturelle Dämpfung berechnet werden. Sie hat vollen Rang und ist invertierbar, weshalb sie für eine computergestützte Modellanpassung mittels der Sensitivitätsmethode verwendet werden kann.

Eine computergestützte Modellanpassung wurde für den Fall rein viskoser RAYLEIGH-Dämpfung und für den Fall rein steifigkeitsproportionaler struktureller Dämpfung durchgeführt. Sie wurde in beiden Fällen erfolgreich für den konsistenten und den inkonsistenten Fall erprobt. Sie hat aufgrund der komplexen Sensitivitätsmatrix und der komplexen Residuen aufgezeigt, dass sie nur unter bestimmten Bedingungen auf diese Weise durchgeführt werden sollte:

- Um die Komplexität der Sensitivitätsmatrix gering zu halten, sollten nur Korrekturparameter eingesetzt werden, die die Systemdämpfung beeinflussen.
- Um die Komplexität der Residuen gering zu halten, sollten die Eigenkreisfrequenzen der Ziel-Eigenwerte mit den Start-Eigenwerten sehr gut übereinstimmen.

Aus den Bedingungen folgen, dass eine Modellanpassung mittels komplexer Eigenwertsensitivitäten erst dann durchgeführt werden sollte, wenn eine Anpassung reeller Eigenwerte mit steifigkeits- und massensensitiven Korrekturparametern durchgeführt worden ist und allein die Dämpfung angepasst werden soll.

## 6. Anwendungsbeispiel: Laborstruktur AIRMOD

In dem folgenden Anwendungsbeispiel wird eine reale Struktur, die in Substrukturen aufgeteilt werden kann, betrachtet. Die Struktur und ihre Substrukturen werden wie in Kap. 5 mathematisch modelliert, aber zusätzlich experimentell untersucht, um reale globale modale Eigenschaften zu erhalten. Die modalen Eigenschaften der Substrukturen dienen als Grundlage, um Dämpfungsmodellierungen für die Substrukturen erstellen und zur Beschreibung der Gesamtsystemdämpfung untersuchen zu können und die computergestützte Modellanpassung an realen Labordaten zu erproben.

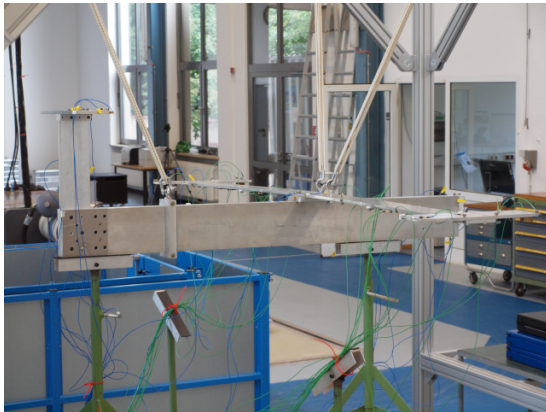
### 6.1. Eigenschaften der Laborstruktur

Die verwendete Teststruktur „Aircraft Model“ (AIRMOD) des DLR Göttingen ist ein fast identischer Nachbau eines Prüfstandes, der im Rahmen einer internationalen Studie zur EMA untersucht wurde. Die Studie wurde 1995 von der *Group for Aeronautical Research and Technology in Europe* (Abk. GARTEUR), Abteilung *Structures and Materials, Action Group 19* (SM-AG19), beschlossen. Das französische Luft- und Raumfahrtinstitut ONERA konstruierte und fertigte diese Struktur, die nacheinander an mehreren europäischen Forschungsinstituten für eine Durchführung verschiedener Testmethoden zur experimentellen Ermittlung modaler Eigenschaften unter fest gesetzten Rahmenbedingungen untersucht wurde [18].

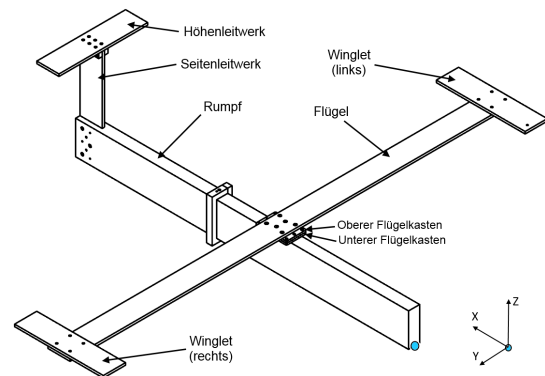
Diese Laborstruktur besteht aus streng rechteckigen Aluminiumplatten- und balken, die mittels Schraubverbindungen verbunden sind. Sie hat die vereinfachte Form eines konventionellen Starrflüglers. Sie besitzt eine Spannweite von 2 m, eine Länge von 1,5 m und eine Höhe von 0,46 m. Sie zeichnet sich durch ihre Symmetrie, ihren einfachen Aufbau und eine geringe Anzahl nichtlinearer Verbindungselemente aus. Sie stellt mit diesen Eigenschaften eine hohe Reproduzierbarkeit experimenteller Ergebnisse sicher [18].

Trotz der einfachen Form hat diese Struktur ein ähnlich komplexes dynamisches Verhalten wie ein reales Flugzeug. Infolge der Symmetrie besitzt sie symmetrische und antisymmetrische Eigenformen, die in einem sehr engen Frequenzband vorkommen können. Bei höheren Frequenzen ab 300 Hz kommen auch asymmetrische Eigenformen vor [17].

Die nachgebaute Struktur AIRMOD des DLR Göttingen wiegt etwa 40 kg. Sie besitzt zusätzlich an den vorderen Flügelspitzen jeweils eine fest verschraubte Zusatzmasse mit einem Gewicht



(a) Laborstruktur AIRMOD in der Versuchshalle des DLR Göttingen



(b) Skizze der Laborstruktur AIRMOD mit Komponenten, Koordinatensystem und Ursprung

**Abbildung 6.1.:** Darstellung der Teststruktur AIRMOD

von 0,152 kg. Sie ist in [Abb. 6.1a](#) dargestellt und in [Abb. 6.1b](#) skizziert.

In [Tab. 6.1](#) sind die exakten Maße der einzelnen Teile in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung wiedergegeben. In [Abb. 6.1b](#) werden den einzelnen Komponenten feste Namen zugewiesen.

Winglets kommen in der Struktur zweimal vor. Alle Komponenten außer dem Rumpf sind, abgesehen von Gewinde- und Bohrlöchern, ohne Aussparungen. Der Rumpf hat am hinteren Ende eine durchgehende vertikale, mittig liegende Aussparung, in die der untere Abschnitt des Seitenleitwerks eingefügt wird.

Der Flügelkasten besteht aus zwei über eine Schraubverbindung verbundenen Aluminiumplatten. Die obere Platte bzw. der obere Flügelkasten ist mit einer Schraubverbindung mit dem Flügel verbunden. Die untere Platte bzw. der untere Flügelkasten ist mit dem Rumpf verbunden. Die Schrauben der Verbindung oberer zu unterer Flügelkasten liegen frei, sodass es sich anbietet, an dieser Verbindung die Laborstruktur in zwei Substrukturen Flügel-Winglets-oberer Flügelkasten (kurz: Flügel) und Rumpf-Leitwerke-unterer Flügelkasten (kurz: Rumpf) zu zerteilen.

Die Kennwerte für Aluminium als linear-elastisches, isotropes Material stehen in [Tab. 5.1](#).

Um Orte von Punkten geometrisch an der Struktur eindeutig festzulegen, wird das in [Abb. 6.1b](#) gezeigte kartesische Koordinatensystem verwendet. Der Ursprung befindet sich in der Mitte der unteren Kante der Rumpfspitze und ist im Bild blau markiert.

Name	x [cm]	y [cm]	z [cm]	verbunden mit
Winglet	40	10	1	Flügel
Höhenleitwerk	10	40	1	Seitenleitwerk
Seitenleitwerk	10	1	45	Höhenleitwerk, Rumpf
Flügel	10	200	1	Winglet, Oberer Flügelkasten
Rumpf	150	5	15	Seitenleitwerk, Unt. Flügelkasten
Unterer Flügelkasten	14	9	8.5	Rumpf, Oberer Flügelkasten
Oberer Flügelkasten	14	9	7.5	Flügel, Unterer Flügelkasten

**Tabelle 6.1.:** Abmessungen der Einzelkomponenten der Laborstruktur AIRMOD

## 6.2. Finite-Elemente-Modellierung

In diesem Abschnitt wird das vorab verfügbare, dazu gehörige FE-Modell auf Modellstrukturfehler untersucht. Zu diesen Fehlern gehören gemäß [21][30]:

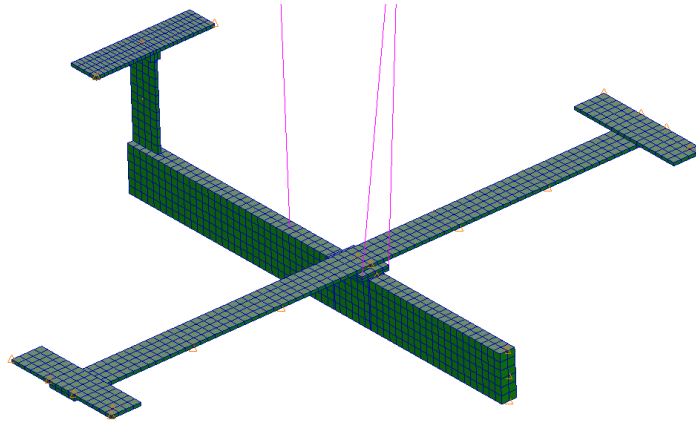
- Idealisierungsfehler, die von den Annahmen zum mechanischen Verhalten der physikalischen Struktur stammen und sich direkt auf die mathematische Beschreibung der physikalischen Gleichungen auswirken, bspw. unangemessene Elementtypen, Vereinfachung der Massenverteilung, Vernachlässigung physikalischer Effekte wie Schub, Vereinfachung von Randbedingungen, fehlerhafte Annahmen bei mechanischen Verbindungselementen, Linearisierung nichtlinearer Effekte.
- Diskretisierungsfehler, die durch die Anwendung numerischer Methoden bedingt sind, bspw. ein zu grobes Netz, Fehler durch Kondensationsprozesse, schlechte Konvergenz.

Um Idealisierungsfehler auszuschließen, wird zuerst dargelegt, aus welchen Elementen das Modell besteht und welche Überlegungen eine Rolle bei der Modellierung gespielt haben. Um den Diskretisierungsfehler einzugrenzen, wird das FE-Modell einer Konvergenzstudie unterzogen.

### 6.2.1. Elementierung

Das anfängliche FE-Modell wurde mit dem FEA-Programm MSC.NASTRAN erstellt und liegt als Eingabedatei vor. In [Abb. 6.2](#) ist das Modell grafisch in der FEA-Pre-/Postprocessing-Software MSC.Patran dargestellt. Das Modell besteht aus 2083 Elementen und 3136 Knoten.

**Dreidimensionale Volumenelemente** modellieren alle Komponenten der Laborstruktur, das heißt, die Analyse der Körper berücksichtigt alle Verformungen und Dehnungen mithilfe der Gleichungen für dreidimensionale Elastizität. Ihre Anwendung ist für alle Komponenten zulässig, da alle Komponenten dreidimensional räumlich ausgedehnt sind und bei keiner der Komponenten eine Abmessung signifikant kleiner oder größer ist als eine der beiden anderen.



**Abbildung 6.2.:** Anfängliche Modellierung der Teststruktur AIRMOD in der FE-Software Patran™

Der Rumpf könnte aufgrund seiner Abmessungen als schlanker Balken vereinfacht werden. Seine Länge ist allerdings nicht bedeutend - weil nur zehnmal - größer als seine größte Querschnittsdimension. Sie ist aber groß genug, dass eine Modellierung des Rumpfes als TIMOSHENKO-Balken zulässig wäre [46].

Bei Flügel, Leitwerken und Winglets wäre zu überlegen, ob sie wegen ihrer dünnen und flachen Form auch als Plattenmodell vereinfacht werden könnten. Allerdings ist deren Dicke nicht signifikant - weil nur zehnmal - kleiner als eine der beiden anderen räumlichen Dimensionen. Aufgrund dieses Seitenverhältnisses und der Materialelastizität fallen sie in die Kategorien von steifen dicken Platten und auch steifen dünnen Platten. Steife dicke Platten sollten voll dreidimensional modelliert werden. Steife dünne Platten sollten als Plattenelemente modelliert werden [45]. Sie geben dann bessere Ergebnisse als Volumenelemente [46]. Bei geometrischen Dicken in der vorliegenden Größenordnung sollten sie die Schubelastizität quer zur Platte nach Reissner-Mindlin berücksichtigen [45].

Die Modellierung aller Komponenten durch Plattenelemente wurde von [17] durchgeführt. Diese Modellierung erfordert besondere Beachtung der Modellierung der Übergänge zwischen den Komponenten aufgrund der Elementformulierung.

Volumenelemente haben den Vorteil, dass durch die konsistente Benutzung für alle Komponenten anliegende Flächen kompatibel zueinander sind. Dies spart Aufwand in der Handhabung der Übergänge zwischen den Komponenten [41]. Zusätzlich kann dadurch bei der vorliegenden Struktur die Elastizität der Schraubverbindungen durch Federelemente prinzipiell modelliert werden.

Volumenelemente haben den Nachteil, dass sie deutlich mehr Knoten und mehr Freiheitsgrade besitzen als andere Elementtypen. Demzufolge wird das Rechenmodell sehr groß und benötigt sehr viel Rechenkapazitäten und Rechenzeit für die Lösung. Eine Fehleranalyse gestaltet sich ebenfalls schwierig, da eine Verfeinerung des Modells im Rahmen einer Konvergenzstudie das Rechenmodell noch größer werden lässt.



**Skalare Federelemente** modellieren die Elastizität der Schraubverbindungen in allen drei Raumrichtungen. An den anliegenden Flächen der Komponenten verbinden sie die koinzidenten Knoten. Aufgrund der Forderung nach Kompatibilität müssen sie alle koinzidenten Knoten verbinden, damit keine unphysikalischen Zustände auftreten. Sie sind eine oft angewandte Vereinfachung, wenn die physikalischen Details an den Verbindungen nicht wichtig sind [28].

Schraubverbindungen dürfen als Federn entlang der Schraubenrichtung mechanisch modelliert werden, da Kräfte durch die Dehnung der elastischen Bauteile übertragen werden [20]. Die elastischen Nachgiebigkeiten von spannenden Bauteilen und verspannten Platten können bei einer einzelnen Schraubverbindung leicht aufsummiert werden. Die Gesamtfedersteifigkeit einer Reihe unterschiedlicher, unregelmäßig angeordneter Schraubverbindungen zwischen zwei Komponenten ist aber schwer abschätzbar.

Die Schraubverbindungen werden ebenfalls mittels skalarer Federn in der Plattenebene modelliert. Dies ist zulässig, wenn man annimmt, dass auftretende Schubkräfte zwischen zwei Platten ausschließlich über die Steifigkeit der Schrauben übertragen wird. Unter Berücksichtigung dieser Annahme existieren in der Industrie mehrere halbempirische Gleichungen, die die Schubsteifigkeit von Schraub- oder Nietverbindungen abschätzen können. Diese sind adäquat einsetzbar im zweidimensionalen Fall. Für den dreidimensionalen Fall können diese aber höchstens als Tendenz gelten, denn sie wurden für eine bestimmte Kombination von Verbindungs- und Platteneigenschaften abgeleitet [38].

**Konzentrierte Massenelemente** fassen die Massen von einzelnen Teilen, die an der Struktur befestigt sind, zusammen und konzentrieren sie an einen Knoten. Diese Vereinfachung wird vorrangig bei Teilen angewandt, die hauptsächlich Masse und wenig bis keine Steifigkeit zum Strukturverhalten beitragen. Das gilt bspw. für die Sensoren und für die angeschraubten Massen an den Winglet-Spitzen der Laborstruktur.

Masselose **Fachwerksstabelemente** modellieren die Elastizität der Bungeeseile in Axialrichtung, die die Aufhängung der ehemaligen Testumgebung modellieren. Ihre Torsionssteifigkeit ist vernachlässigbar. Ihre Translationsfreiheitsgrade sind am Aufhängungspunkt unterbunden und am unteren Ende mit der Volumenelemente-Struktur verbunden. Ihre Rotationsfreiheitsgrade sind an beiden Enden unterbunden. Die Verbindung von Fachwerksstabelementen und Volumenelementen ist ohne zusätzliche kinematische Bedingungen unterbestimmt, sodass sich die Volumenelemente ohne Spannungen im Raum drehen können und somit Starrkörperbewegungen möglich sind, die die Stabelemente nicht belasten.

Bungeeseile verhalten sich im Allgemeinen sehr nichtlinear. Nur in sehr kleinen Dehnungsbereichen kann ihr Verhalten als linear angenommen werden. Für die vorliegenden dynamischen Analysen ist diese Vereinfachung zulässig.

Die eigentlichen Bungeeseile sind durch Schekel mit der Laborstruktur verbunden, sodass auch die Verbindung gerechtfertigt ist.

Die angeführte Idealisierung der Struktur mit allen genannten Elementen ist prinzipiell zulässig, sodass keine Abänderung der Elementtypen notwendig erscheint.

### 6.2.2. Konvergenzstudie

Das FE-Rechenmodell muss wie bei der Rechteckplatte vor seinem Einsatz auf sein Konvergenzverhalten überprüft werden, um mögliche Diskretisierungsfehler durch eine geeignete Vernetzung und Formulierung zu korrigieren. Es liefert bei einer Eigenwertanalyse ebenfalls Eigenfrequenzen  $f_0$  als Lösung, die außer zur Definition des Lösungsfehlers  $\varepsilon_S$  wie in Kap. 5.1 auch zur Bestimmung des Konvergenzfehlers  $\varepsilon_K$  verwendet wird.

$$\varepsilon_K = \frac{f_{0,neu} - f_{0,alt}}{f_{0,alt}} \quad (6.1)$$

Die Laborstruktur stellt einige Herausforderungen an eine Konvergenzstudie, die teilweise eine Vereinfachung des FE-Modells erfordern:

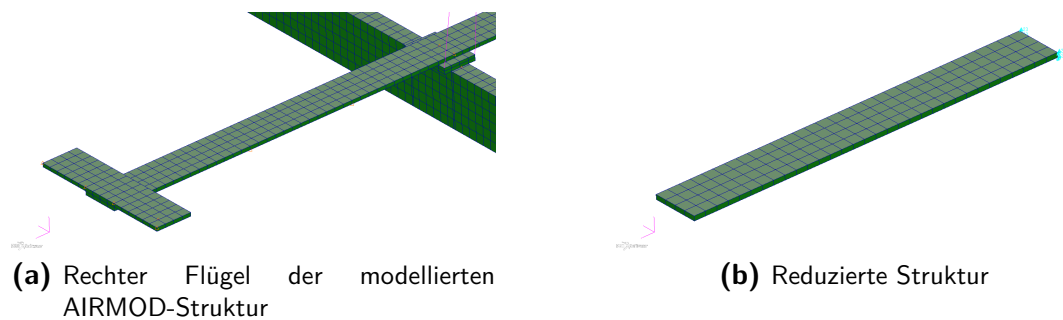
- Die Laborstruktur stellt ein komplexes Modell dar, für das keine analytische Lösung abzuleiten ist. Es gibt somit weder analytische noch geschätzte Werte, die als Zielwerte bei der Untersuchung des Konvergenzverhaltens herhalten können.
- Bei einer Netzverfeinerung verändern sich unter Umständen die Koordinaten einzelner Knoten an den anliegenden Flächen, sodass sich die Anzahl der skalaren Federn ändert. Das FE-Modell verändert sich in einem Maße, dass die FE-Lösung nicht mehr zur Bewertung des Konvergenzverhaltens beitragen kann.
- Wie in Kap. 6.2.1 dargelegt ist, sind Volumenelemente rechentechnisch teuer. Bei einer Netzverfeinerung würde sich die Zahl der Freiheitsgrade vervielfachen und das ohnehin bereits große Modell noch weiter wachsen. Dies erschwert eine Konvergenzstudie in großem Maße.

Aus diesen Gründen muss das Modell auf einen repräsentativen Abschnitt vereinfacht werden.

Die Flügel haben wie bei konventionellen Starrflüglern eine längliche, flache Form, die eine niedrige Biege- und Torsionssteifigkeit zur Folge hat. Zusätzlich haben sie mit den Winglet-Platten zusätzliche Massen an den Flügelspitzen. Dadurch sind die Flügel die dominanten Komponenten in den niedrigsten elastischen Eigenformen der Laborstruktur. Im Anhang in Kap. A.3 sind die Eigenfrequenzen und Eigenformen des FE-Modells aufgeführt.

Zusätzlich haben fast alle anderen Komponenten des FE-Modells wie der Flügel eine vergleichbare Form und bestehen wie der Flügel aus trilinearen Hexaeder-Volumenelementen des Typs CHEXA. Eine Konvergenzstudie bietet also Hinweise darauf, wie gut diese Elemente die Steifigkeitsverteilung solcher Strukturen abbilden können.

Die Flügelstruktur wird deshalb als reduzierte, repräsentative Struktur ausgewählt. Im nächsten Schritt wird die Flügelstruktur unter Ausnutzung der Symmetrie nur auf einer der beiden Flügelhälften betrachtet. An der Stelle, wo die Flügelhälfte über den Flügelkasten herausragt, wird der Flügel abgeschnitten und eingespannt. Zuletzt wird die Struktur um die Winglets und den angebundenen Flügelabschnitt aufgrund des Problems der skalaren Federn reduziert.



**Abbildung 6.3.:** Darstellung der reduzierten Struktur als Ersatz für AIRMOD-Flügel

Seitenlänge [cm]	Anzahl der Schichten (nur CHEXA)	Verfeinerungsschritt
5	1	-
2,5	1	1. Verfeinerungsschritt
1	1	2. Verfeinerungsschritt
0,5	2	3. Verfeinerungsschritt
0,25	4	4. Verfeinerungsschritt

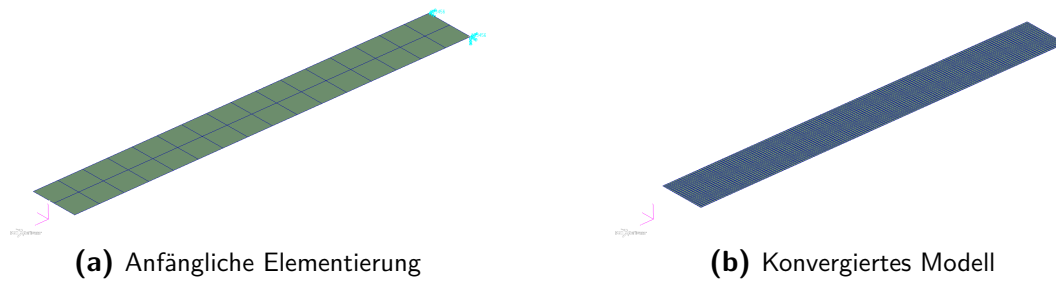
**Tabelle 6.2.:** Elementseitenlängen und -schichtanzahl bei Netzverfeinerung des Modells der Flügelstruktur

Die finale reduzierte Struktur hat eine Länge von 80 cm, eine Breite von 10 cm und eine Dicke von 1 cm. Sie ist in Abb. 6.3b dargestellt und ist hier mit CHEXA-Elementen der Seitenlänge 2,5 cm, wie im vorab verfügbaren FE-Modell, modelliert.

Die Möglichkeiten zur analytischen Lösung der Eigenfrequenzen der reduzierten, plattenartigen Struktur sind allesamt außerordentlich aufwändig und fehleranfällig. Vollständig analytische Lösungen sind nur in wenigen ausgewählten Fällen und unter zahlreichen Vereinfachungen möglich. Dabei besteht die Hauptschwierigkeit darin, die partiellen Bewegungsdifferentialgleichungen durch einen geeigneten Ansatz in gewöhnliche Differentialgleichungen zu überführen [16]. Auf die exakte analytische Lösung wird daher verzichtet, da das den Rahmen dieser Arbeit übersteigen würde.

Aus diesem Grund wird das Problem ersatzweise numerisch mit Elementen des Typs CQUAD4 gelöst. Diese Elemente sind isoparametrische, flache Plattenelemente. Sie werden verwendet, wenn zwei Dimensionen einer Struktur deutlich größer sind als die beiden anderen und die Struktur eben ist. Sie können Kräfte in Ebenenrichtung, Biegemomente und Schubkräfte quer zur Ebene tragen. Sie können auf diese Weise das dynamische Verhalten von Membranen, dünnen und dicken Platten idealisiert simulieren [28].

Für das vorliegende Problem einer plattenartigen Struktur wird wegen des Materials Biegeelastizität und wegen der Dicke Schubweichheit zugelassen.



**Abbildung 6.4.:** Elementierung der reduzierten Struktur mit Plattenelementen des Typs CQUAD4

Die anfängliche Elementierung des Modells ist in Abb. 6.4a in Patran dargestellt. Das Modell besteht aus quadratischen Plattenelementen der Seitenlänge 5 cm. Im Rahmen einer Konvergenzstudie wird das Netz durch gleichmäßige Verringerung der Seitenlängen der Plattenelemente verfeinert, bis der jeweilige Konvergenzfehler  $\varepsilon_K$  der ersten zehn Eigenformen kleiner als 0,5% ist. Es werden genau die ersten zehn Eigenformen verwendet, da höhere Flügeigenformen an der Gesamtstruktur in dem experimentell untersuchten Frequenzbereich (s. Kap. A.3) nicht vorkommen.

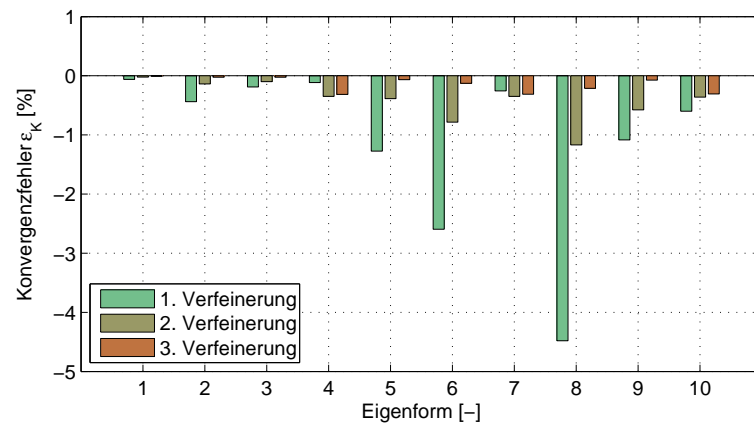
In Tab. 6.2 sind die Netzverfeinerungsschritte angegeben, die für das Modell mit CQUAD4-Elementierung und später für das Modell mit CHEXA-Elementierung durchgeführt werden. Die Netzverfeinerungsschritte sind so gewählt, dass die einheitliche Vernetzung der Struktur wie beim gegebenen Modell in Abb. 6.2 beibehalten wird.

Verzerrungen oder Abweichungen vom idealisierten gleichseitigen Würfel werden weitestgehend vermieden, um eine höchstmögliche Genauigkeit der Berechnungsergebnisse zu erzielen (siehe auch Kap. 2.2.2). Nur durch die begrenzte Dicke der Platte kommen ungleiche Seitenverhältnisse der Volumenelemente erzwungenermaßen zustande, was sich dann in  $\det[J]_{Elm} \neq 1$  äußert [5][46].

Der Verlauf des Konvergenzfehlers für die berechneten Eigenfrequenzen der ersten zehn Eigenformen ist in Abb. 6.5a dargestellt. Hierbei ist zu erkennen, dass für alle der ersten zehn Eigenkreisfrequenzen die Veränderung bei der 3. Verfeinerung unter 0,5% liegt. Der Verlauf legt nahe, dass dieses Modell konvergiert ist. Dieses konvergierte Modell ist in Abb. 6.4b dargestellt und besteht aus 3200 Elementen und 3381 Knoten. Seine Eigenkreisfrequenzen sind in Tab. 6.5b aufgelistet und werden als Referenzwert für die Konvergenzstudie mit Volumenelementen hergenommen.

Das Modell wird nun mit CHEXA-Elementen 1. Ordnung elementiert. Es hat wie bei der Konvergenzstudie mit den Plattenelementen vor der 1. Verfeinerung Elemente der Seitenlänge 5 cm. Das anfängliche und konvergierte Modell ist in Abb. 6.6 dargestellt. Seine ersten zehn Eigenfrequenzen werden numerisch bestimmt und das Netz wird verfeinert.

Der Verlauf des Konvergenzfehlers ist in Abb. 6.7 dargestellt. Er zeigt deutliche Konvergenzfehler nach der 1. und nach der 2. Verfeinerung bei der 5., 6. und 8. Eigenform - allesamt höhere Biegeeigenformen - auf. Die Konvergenzgeschwindigkeit ist außerdem besonders bei der 4., 7.



(a) Konvergenzverlauf der Eigenfrequenzen der reduzierten Struktur bei Verwendung von CQUAD4-Elementen

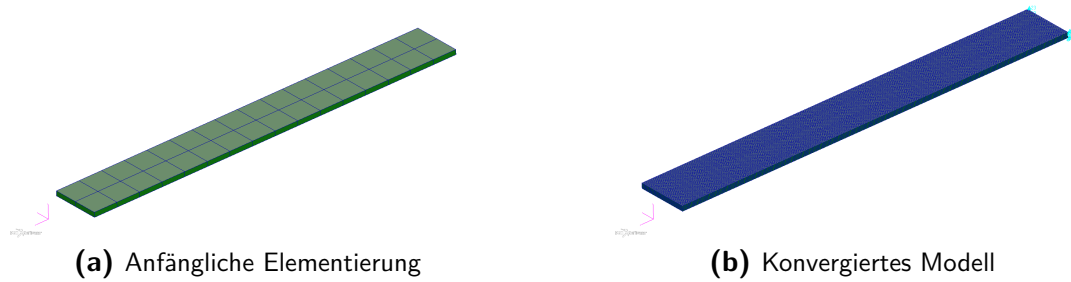
Eigenform	Bezeichnung	Eigenfrequenz $f_0$ [Hz]
1	1. Biegung	12,97
2	2. Biegung	81,22
3	1. Schwenkung	127,2
4	1. Torsion	194,6
5	3. Biegung	227,5
6	4. Biegung	446,3
7	2. Torsion	588,6
8	5. Biegung	738,6
9	2. Schwenkung	745,2
10	3. Torsion	997,1

(b) Eigenfrequenzen des konvergierten Flügelmodells mit CQUAD4-Elementen

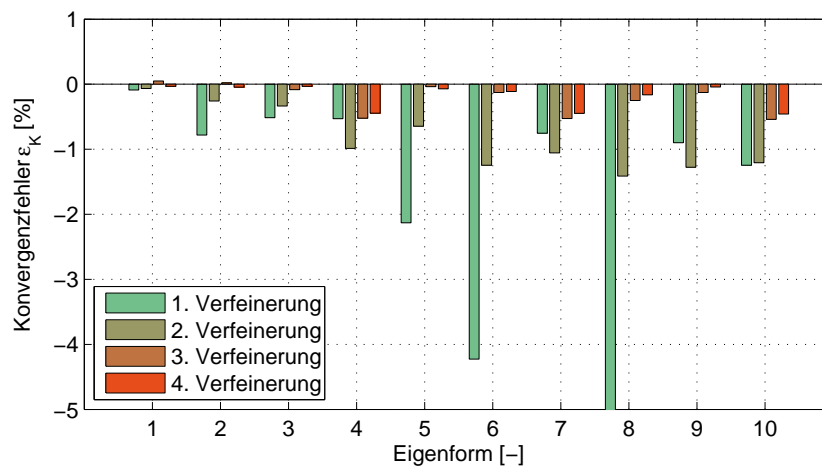
**Abbildung 6.5.:** Konvergenzverlauf und konvergierte Eigenfrequenzen des CQUAD4-Flügelmodells

und 10. Eigenform - den Torsionseigenformen - außerordentlich langsam. Für alle Eigenformen außer den Torsionseigenformen liegen die Konvergenzfehler bei der 3. Verfeinerung unter 0,5%. Erst nach der 4. Verfeinerung ist der Konvergenzfehler auch bei den Torsionseigenformen unter 0,5%.

Abb. 6.8 zeigt den Lösungsfehler zu den Referenzwerten für das Modell nach der 4. Verfeinerung. Die Fehler zeigen an, dass das endgültig verfeinerte Modell aus CHEXA-Elementen 1. Ordnung annähernd das Verhalten des konvergierten Referenzmodells aus CQUAD-Elementen besitzt. Auffällig ist der große negative Fehler bei den Torsionseigenformen, die bereits ein sehr schwaches Absinken des Konvergenzfehler aufgezeigt haben. Hier liegt die Vermutung nahe, dass auch bei einer weiteren Verfeinerung die Eigenfrequenzen weiter merklich absinken würden.



**Abbildung 6.6.:** Elementierung der reduzierten Struktur mit Volumenelementen des Typs CHEXA 1. Ordnung

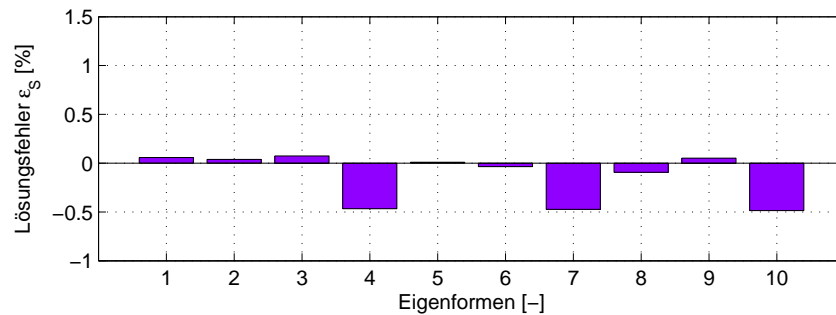


**Abbildung 6.7.:** Konvergenz der Eigenfrequenzen der reduzierten Struktur bei Verwendung von CHEXA-Elementen 1. Ordnung

Weiterhin ist anzumerken, dass das Modell nach all den Verfeinerungsschritten aus 51200 Elementen und 65805 Knoten besteht. Dies ist bereits für das vorliegende Problem und im Hinblick auf eine Elementierung des Gesamt-FE-Modells für eine effiziente numerische Berechnung viel zu viel.

Diese Beobachtungen werfen die Frage auf, ob die gewählte Formulierung der Volumenelemente die Steifigkeitsverteilung der Struktur im Hinblick auf eine Modalanalyse angemessen wiedergeben können.

Es ist bekannt, dass rein verschiebungsbezogene Elemente, bspw. Balken, Platten und Schalen, ein Verhalten namens *Locking* (engl. Blockieren, Sperren) aufweisen können. Locking äußert sich in einer unphysikalisch steifen Antwort auf eine Formänderung, welche im Allgemeinen durch eine ungenaue Formulierung des isoparametrischen Elementes bedingt ist. Auffällig ist Locking auch durch eine langsame Konvergenzgeschwindigkeit [5].



**Abbildung 6.8.:** Lösungsfehler bei Verwendung von CHEXA-Elementen 1. Ordnung

Es gibt mehrere Locking-Arten. Bedingt durch die Geometrie und die Materialkennwerte der vorliegenden Struktur kommt aber nur das *Shear Locking* (engl. Schub-Sperren) in Frage.

Shear Locking tritt bei schubweichen, zweidimensionalen Balken-, Platten- und Schalenstrukturen auf, die mit linearen Elementen bei voller Integration modelliert werden und hauptsächlich Biegeverformungen aufweisen. Die Elemente 1. Ordnung können mit ihren Interpolationsfunktionen  $N$  die Biegeverformungen  $w$  nicht angemessen abbilden, was zu einer zu großen Schubdehnungsenergie bei einer Biegeverformung führt. Dieser zusätzliche Energieaufwand hat zur Folge, dass das Element zu steif reagiert [46].

Besonders ausgeprägt ist das Shear Locking, wenn die Struktur und somit das verwendete Balken-, Platten- oder Schalenelement dünn ist. Die Anwendung des Prinzips virtueller Verrückungen liefert hierbei Erkenntnisse über das Verhalten der Dehnungsenergie. Sinkt die Biegesteifigkeit  $EI$  infolge des dünnen Querschnitts und lässt man Schubverformungen größer 0 zu, wird die Schubdehnungsenergie fehlerhaft und viel zu hoch [5].

Für diese Typen von Elementen gibt es folgende Gegenmaßnahmen:

- *Netzverfeinerung:* Eine kontinuierliche Verfeinerung des Netzes lässt die Ergebnisse schließlich konvergieren. Dies ist allerdings eine unzureichende und ineffiziente Möglichkeit [5].
- *Formulierung mit gemischten Interpolationsfunktionen:* Bezieht man die Schubdehnung in die Interpolationsfunktionen ein, gelangt man zu verlässlichen Elementen, die kein Shear Locking aufweisen und schnell konvergieren [5].
- *Höherer Polynomgrad:* Elemente mit quadratischen oder höherwertigen Ansatzfunktionen können Biegeverformungen angemessen abbilden und weisen kein Shear Locking auf [46]. Bei Platten werden mindestens kubische Interpolationsfunktionen empfohlen, besonders wenn die Elemente verzerrt sind [5].
- *Reduzierte Integration:* Elemente mit reduzierter Integration benutzen weniger Integrationspunkte, also Stützstellen in den Ansatzfunktionen zur Integration der Polynome. Dies hat zur Folge, dass die Steifigkeitsmatrizen nicht exakt berechnet werden und Singularitäten auftreten können. Bei übermäßig struktureller Steifigkeit durch die Ele-

mentformulierung, bspw. infolge *Shear Locking*, kann dieser Ansatz insgesamt bessere Ergebnisse liefern, wenn der Fehler in der numerischen Integration die Überschätzung der Steifigkeit in angemessenem Maße kompensiert [5].

Die aufgelisteten Gegenmaßnahmen beziehen sich auf ein- und zweidimensionale Elemente. Sie beziehen sich nicht explizit auf dreidimensionale Volumenelemente.

*Shear Locking* tritt aber auch bei dreidimensionalen isoparametrischen, voll integrierten Volumenelementen auf [5]. Es ist an dieser Stelle nicht klar, ob das Phänomen auch in den verwendeten Elemente von MSC.NASTRAN auftritt.

In [42] wurden dreidimensionalen Elementen aus den Software-Paketen MSC/NASTRAN, ABAQUS und ANSYS auf ihre *Shear Locking*-Anfälligkeit erprobt. Sie wurden mit verschiedenen feiner Vernetzung zur Modellierung eines Balkens benutzt.

Der Studie zufolge leiden voll integrierte CHEXA-Elemente 1. Ordnung unter *Shear Locking*. Voll integrierte Elemente 2. Ordnung weisen auch bei groben Netzen kein *Shear Locking* auf. Berechnet man CHEXA-Elemente 1. oder 2. Ordnung mit reduzierter Integration, wird ebenfalls *Shear Locking* vermieden [42].

Die hier durchgeführte Konvergenzstudie mit CHEXA-Elementen 1. Ordnung wurde mit Standardeinstellungen für diese Elemente durchgeführt. Diese Standardeinstellungen sind reduzierte Integration zur Vermeidung von *Shear Locking* sowie spezielle Funktionen zur Vermeidung von Nullenergiemoden.

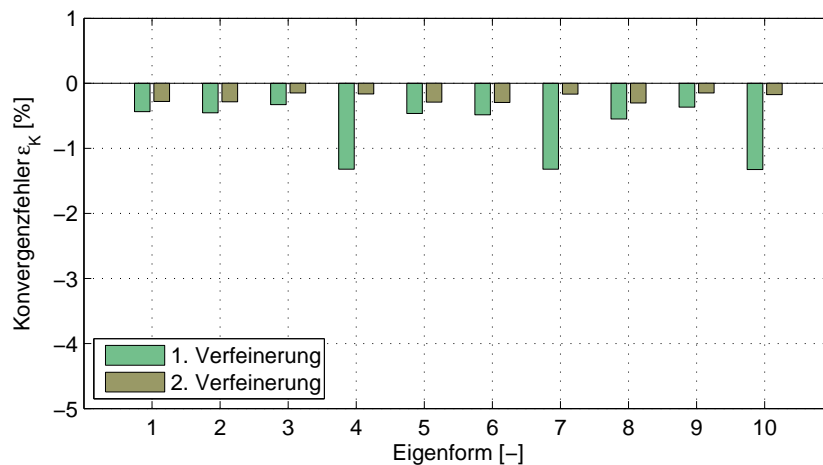
Gegen die Konvergenzprobleme verbleibt als Gegenmaßnahme im Rahmen von MSC.NASTRAN die Formulierung mit einem höheren Polynomgrad. Diese Gegenmaßnahme wird im Rahmen einer Konvergenzstudie mit CHEXA-Elementen 2. Ordnung mit Standardeinstellungen, also auch mit reduzierter Integration, durchgeführt.

Der Verlauf des Konvergenzfehlers für die Elementierung mit CHEXA-Elementen 2. Ordnung ist in [Abb. 6.9](#) dargestellt. Er zeigt, dass bereits nach der 2. Verfeinerung der Konvergenzfehler für alle Eigenformen unter 0,5% liegt und keine Konvergenzprobleme mehr auftreten.

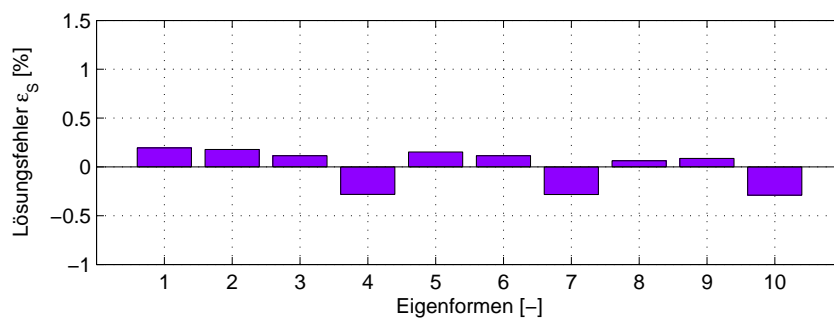
[Abb. 6.10](#) zeigt den Lösungsfehler der konvergierten Lösung gegenüber den Referenzwerten. Größere Lösungsfehler gegenüber den Referenzwerten stehen dabei im Einklang mit der Beobachtung, dass feine Vernetzungen mit CHEXA-Elementen 1. Ordnung und reduzierter Integration eine konvergierte Lösung mit Werten niedriger als die richtige Lösung ergeben [42]. Das Problem der Lösungsabweichungen bei den 4., 7. und 10. Eigenformen konnte durch die Erhöhung der Elementordnung nicht gelöst werden und liegt vermutlich an der unterschiedlichen Formulierung von Platten- und Volumenelementen.

Da der Konvergenzfehler nach der 2. Verfeinerung durchgehend sehr klein ist, werden Elemente der Größe nach der 1. Verfeinerung gewählt, um das Modell möglichst klein zu halten. Die Größe entspricht den geometrischen Abmessungen der CHEXA-Elemente am Flügel des ursprünglich zur Verfügung gestellten FE-Modells.





**Abbildung 6.9.:** Konvergenz der Eigenfrequenzen der reduzierten Struktur bei Verwendung von CHEXA-Elementen 2. Ordnung



**Abbildung 6.10.:** Lösungsfehler bei Verwendung von CHEXA-Elementen 2. Ordnung

### 6.2.3. Neuaufbau des FE-Modells

Das FE-Modell des AIRMOD wird auf Grund der Ergebnisse der Konvergenzstudie mit CHEXA-Elementen 2. Ordnung neu aufgebaut. Dafür werden die Elemente der Größe nach der 1. Verfeinerung zur Neuelementierung von Flügel, Winglets sowie Höhen- und Seitenleitwerk verwendet. Die Elementdimensionen an den Übergängen von Höhen- zu Seitenleitwerk sind der Geometrie an den Stellen geschuldet. Die Elementdimensionen von Flügelkasten sowie Rumpf ergeben sich automatisch aus der vorgenommenen Elementierung der anderen Bauteile, wenn man inkompatible Übergänge vermeiden möchte.

Durch den Neuaufbau können außerdem Elemente mit schlechten Seitenverhältnissen, wie sie in der anfänglichen Modellierung in [Abb. 6.2](#) am Übergang von Seitenleitwerk zu Höhenleitwerk und am Rumpf zu erkennen sind, vermieden werden.

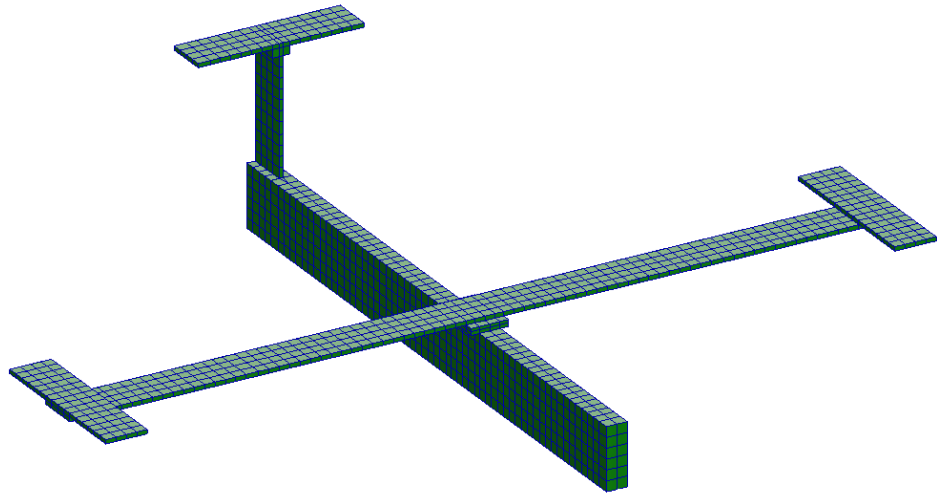
Das neu aufgebaute Modell ist in [Abb. 6.11a](#) abgebildet. Es besitzt 10075 Knoten und 1990

Elemente.

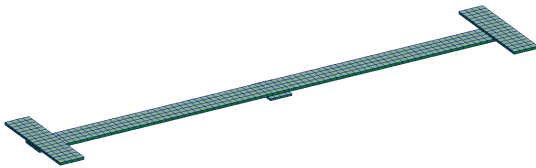
Im ursprünglich zur Verfügung gestellten FE-Modell in [Abb. 6.2](#) sind beide Substrukturen am Übergang unterer zu oberer Flügelkasten über gemeinsame Knoten fest miteinander verbunden. Im neu aufgebauten Modell wird der Flügelkasten in zwei Teile aufgespalten, sodass keine gemeinsamen Knoten existieren.

Das FE-Modell der Substruktur Flügel ist in [Abb. 6.11b](#) dargestellt. Es besteht aus 808 Elementen und 3980 Knoten. Das FE-Modell der Substruktur Rumpf ist in [Abb. 6.11c](#) dargestellt. Es besteht aus 1355 Elementen und 6088 Knoten. [Abb. 6.11c](#) dargestellt.

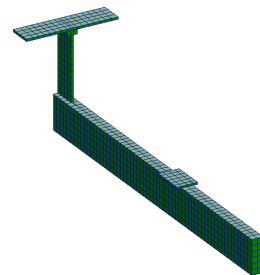
Die Verbindung von unterem und oberem Flügelkasten besteht aus vier symmetrisch angeordneten Durchsteckverbindungen und ist in [Abb. 6.11e](#) abgebildet. Sie wird wie alle anderen Schraubverbindungen des Rechenmodells mit skalaren Federelemente modelliert, sowohl zwischen den Substrukturen im FE-Modell der Gesamtstruktur als auch als elastische Einspannung der Substrukturen. Diese gleichmäßige Modellierung wird gewählt, um die Verbindungsmodellierung im Rechenmodell einheitlich zu gestalten. Sie wird gewählt, obwohl die Verbindungselemente einen großen Abstand besitzen und die Flächenpressung auf einen lokalen Bereich um die Verbindungselemente konzentriert ist, sodass eine nichtkonstante Flächenpressung über die Kontaktflächen von oberem und unterem Flügelkasten besteht [20]. Es treten somit wahrscheinlich nichtlineare Reibungseffekte an dieser Verbindung auf, die nicht im Rechenmodell widerspielt sind [8].



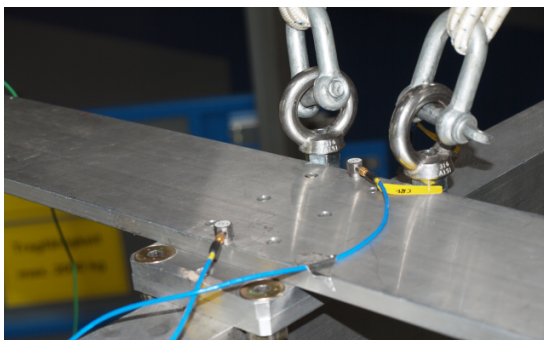
(a) FE-Modell der Gesamtstruktur



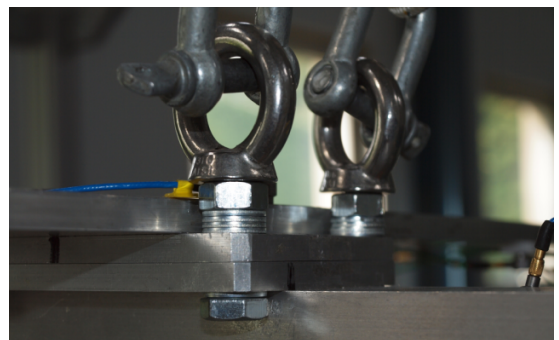
(b) FE-Modell der Substruktur Flügel



(c) FE-Modell der Substruktur Rumpf-Leitwerk



(d) Schraubverbindung von unterem (81) und oberem (82) Teil des Flügelkastens



(e) Schraubverbindung von unterem (81) und oberem (82) Teil des Flügelkastens

**Abbildung 6.11.:** FE-Modelle der Laborstruktur: gesamt und Substrukturen

## 6.3. Experimentelle Modalanalyse

In diesem Abschnitt wird die experimentelle Modalanalyse (Abk.: EMA) an der Laborstruktur AIRMOD sowie an ihren Substrukturen geplant und durchgeführt, um modale Eigenschaften auf experimentellem Wege zu erhalten und damit die FE-Rechenmodelle zu validieren.

Aus Kap. 6.1 ist bekannt, dass die Gesamtstruktur AIRMOD aus den Substrukturen Flügel und Rumpf-Leitwerk-Verbund besteht. Eine EMA an der Gesamtstruktur liefert somit globale modale Eigenschaften, während EMAs an den Substrukturen individuelle modale Eigenschaften liefern.

Modale Modelle der Substrukturen sind vor den Modaltests unbekannt. Sie werden experimentell bestimmt und sind Grundlage für die Modellierung von proportionalen Dämpfungsmodellierungen an der jeweiligen Substruktur.

Eine EMA der Gesamtstruktur soll hierbei globale modale Eigenschaften liefern, die als Überprüfung der numerisch errechneten modalen Eigenschaften der gekoppelten, gedämpften Substrukturen dienen sollen. Sie wird trotz oft erfolgter Modalanalyse der Gesamtstruktur erneut vorgenommen, da insbesondere modale Dämpfungsmaße nachweislich selbst bei gleichen Testbedingungen in mehreren, nacheinander folgenden Modaltests stark Abweichungen zeigen können [17].

Für einen zweiten Datensatz sollen die Flügel ähnlich wie in [18] mit einer dämpfungserzeugenden Schicht behandelt werden. Eine Änderung der modalen Eigenschaften durch Anbringung der Schicht erfordert weitere Modaltests.

Für eine sorgfältige Testplanung sind unangepasste FE-Modelle vorhanden. Sie ermöglichen eine adäquate und vollständige Definition von Mess- und Anregungspunkten sowie Einstellungen zur Signalaufnahme und -verarbeitung [39].

Es soll bis 400Hz gemessen werden. Die Komponenten sollen jeweils an mindestens drei unterschiedlichen Erregerpunkten angeregt werden. Für jeden Erregerpunkt ist ein Durchschnitt aus 8 Messdatensätzen zu erzeugen. Die Messdatensätze sollen dann mittels der Software LMS Test.Lab 13A *Modal Analysis*, die den PolyMAX-Algorithmus aus Kap. 3.3.1 umsetzt, ausgewertet werden.

### 6.3.1. Vorbereitung

Geplant sind insgesamt 8 Tests. In Tab. 6.3 sind die untersuchten Komponenten und die erforderlichen Testbedingungen für die Modaltests aufgetragen. Die Kennung besteht aus Testnummer und Komponentenkenung – C0 für Gesamtstruktur, C1 für Flügel, C2 für Rumpf und Leitwerk.

Testnr.	Komponente	Testbedingungen	Dämpfungsbehandlung	Kennung
1	Gesamtstruktur	frei-frei	-	T1C0
2	Flügel	frei-frei	-	T2C1
3	Rumpf	frei-frei	-	T3C2
4	Rumpf	eingespannt	-	T4C2
5	Flügel	eingespannt	-	T5C1
6	Flügel	eingespannt	dämpfungsbehandelt	T6C1
7	Flügel	frei-frei	dämpfungsbehandelt	T7C1
8	Gesamtstruktur	frei-frei	dämpfungsbehandelt	T8C0

**Tabelle 6.3.:** Testmatrix der experimentellen Modalanalyse an der Laborstruktur AIRMOD

Die Gesamtstruktur in Test 1 und 8 wird frei-frei gelagert, da zusätzliche Randbedingungen wie Gelenke oder Verbindungen praktisch Nichtlinearitäten hervorrufen können und die Qualität der Messung dadurch reduziert werden kann.

In Test 4, 5 und 6 sollen die Substrukturen entsprechend ihrer Kopplung mit der jeweils anderen Substruktur gelagert werden. Sie müssen daher mit ihrem jeweiligen Teil des Flügelkastens mithilfe gleicher Schraubverbindung mit einer Struktur sehr großer Masse verbunden werden.

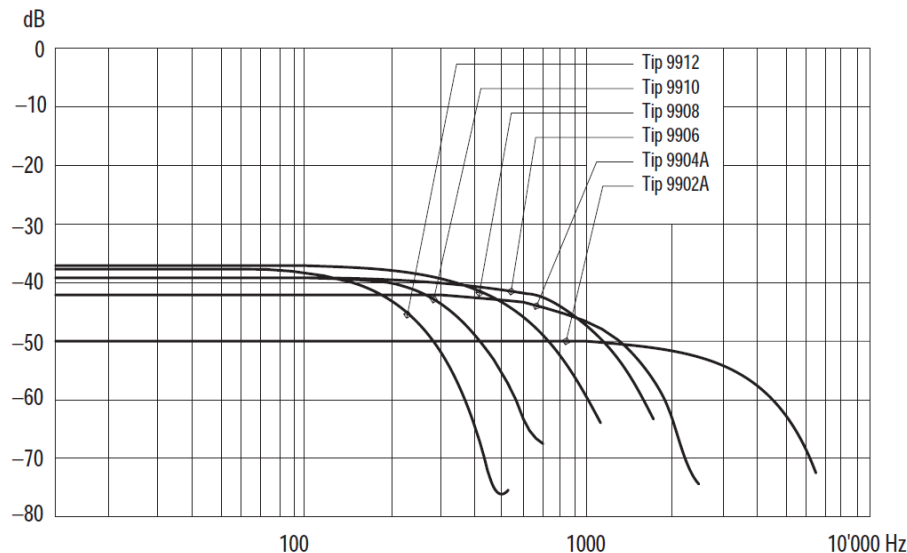
Die Tests 2, 3 und 7 haben im Vergleich zu den anderen 5 Tests wenig Bedeutung und sollen die Substrukturen lediglich zusätzlich charakterisieren.

Die Reihenfolge der Tests entspricht den Laufnummern der Testmatrix und wurde so gewählt, dass Umbauten, die die modalen Eigenschaften beeinflussen könnten, weitestgehend vermieden werden.

Als Verfahren der EMA wird eine Phasentrennung mittels Impulserregung durch einen handgeführten Modalhammer gewählt. Ein solcher Hammertest hat mehrere Vorteile. Der Hammer ist im Gegensatz zu Shakern flexibel an allen Stellen der Laborstrukturen einsetzbar und erlaubt dadurch eine hohe Qualität der identifizierten modalen Eigenschaften durch optimale Anregungspunkte. Er führt dem System Laborstruktur wenig Energie zu und vermeidet somit nichtlineares Material- und Strukturverhalten.

Zur Realisierung der Ersatzlagerung für eine annähernd frei-freie Lagerung stehen Bungee-Seile sowie ein Gestell der Firma item zur Verfügung. An das Tragwerk des item-Gestells können Haken zur Befestigung der Bungee-Seile eingeschraubt werden. Wie in [Abb. 6.11e](#) werden an die freiliegenden Schraubgewinde des Flügelkastens Ringmuttern angebracht, die über Schäkel mit den anderen Enden der Bungee-Seile verbunden werden. Am hinteren Teil der Rumpfstruktur ist eine Aluminiumklemme mit Gewinde installiert, in die eine Ringschraube eingeschraubt wird und mittels Schäkel eine Befestigung eines hinteren Bungee-Seils ermöglicht.

Zur Realisierung der Ersatzlagerung für eine eingespannte Lagerung steht ein luftgelagertes Fundament mit Verschraubungsmöglichkeiten zur Verfügung.



**Abbildung 6.12.:** Amplitudenspektrum verschiedener Schlagspitzen [26]

Als Erreger steht ein Impulshammer des Typs 9726A20000 der Firma Kistler zur Verfügung, sowie mitgeführte auswechselbare Schlagspitzen verschiedener Steifigkeit und eine Zusatzmasse. Im Hammer ist ein Piezosensor verbaut, der zur Messung des Erregersignals dient [26].

In Abb. 6.12 sind die Amplitudenspektren der verschiedenen Schlagspitzen bei gleicher Impulsdauer dargestellt. Für die Modaltests bei einer geforderten Anregung bis 400 Hz mit einem erlaubten Abfall von 10 bis 20 dB hat sich die Schlagspitze „Tip 9906“ aus Weich-PVC als zuverlässige Erregung ohne starken Amplitudenabfall auch bei längeren Impulsdauern gezeigt [26].

Bei den Sensoren handelt es sich um Piezosensoren vom Typ M352C65 der Firma PCB Piezotronics. Sie wiegen jeweils 2 g. Sie sind bereits kalibriert. Sie können Beschleunigungen bis  $491 \text{ m/s}^2$  messen und weisen Sensitivitäten um  $10,2 \text{ mV}/(\text{m/s}^2)$  auf, wobei jeder Sensor seine individuelle Sensitivität besitzt. Sie besitzen eine Nennresonanzfrequenz von etwa 35 kHz, können also für die folgenden Modaltests ohne Bedenken bei Schraub- oder Klebbefestigung verwendet werden. Im Frequenzbereich von 0,5 bis 10000 Hz haben sie eine maximalen Frequenzabweichung von 5%. Sie werden durch ICP (*Integrated Circuit Piezoelectric*) mit Strom versorgt, was bedeutet, dass sowohl der Versorgungsstrom als auch das Messsignal über das gleiche Kabel übertragen werden können. Spezieller Sekundenkleber vom Typ 080A90 sowie Montagesockel mit Gewinde als Verbindung von Sekundenkleber und Sensor stehen zusätzlich zu den Sensoren zur Verfügung [33].

Als Kabel zur Übertragung der Messsignale dienen Koaxialkabel, die störende Rauschteile im Kabel minimieren.

Zur Signalverarbeitung steht ein LMS SCADAS III Datenerfassungsgerät der Firma Siemens zur Verfügung. Das Gerät erfasst die aufgenommenen Messsignale auf bis zu 96 Kanälen und verarbeitet sie zu Frequenzgängen. Es hat einen Anti-Aliasing-Filter sowie einen Analog-

Einstellung	Ausgewählte Option
Bandbreite $f_{max}$	400 Hz
Abtastfrequenz $f_A$	800 Hz (automatisch)
Anzahl der Spektrallinien $N$	8192
Auflösung $\Delta f$	0,049 Hz (automatisch)
Messzeitraum $T_M$	20,48 s (automatisch)
Mittelung mit $x$ Datensätzen	8
H-Schätzer	H1
<i>Pre-Trigger Delay</i>	0,01 s
Kraftfenster	Signal abschneiden nach 0,5% $T_M$
Wichtungsfunktion für Signale	Exponentialfenster
Abklingrate $\chi$	5%

**Tabelle 6.4.:** Einstellungen zur Signalaufnahme und -verarbeitung in LMS Test.Lab 13A *Impact Testing*

Digital-Wandler mit 24 Bit vorgeschaltet und kann über Ethernet mit einem PC verbunden werden.

Zur Steuerung der Signalaufnahme und -verarbeitung steht ein PC mit der Software LMS Test.Lab 13A *Impact Testing* zur Verfügung. Die gewählten Einstellungen sind in Tab. 6.4 aufgelistet und werden im Folgenden erläutert.

Die Bandbreite wurde entsprechend der Forderung nach der Messung bis 400 Hz gewählt. Die Abtastfrequenz wird von der Software automatisch auf das Doppelte der Bandbreite gesetzt, um das Abtasttheorem zu beachten.

Signale werden über die gesamte Bandbreite aufgenommen und darüber zu Frequenzgängen verarbeitet, aber aufgrund des Anti-Aliasing-Filters werden die Spektralanteile oberer Frequenzen beeinflusst. Diese Spektralanteile können zur Identifikation modaler Eigenschaften verwendet werden, sind aber aufgrund des Filters nicht zuverlässig. Zum Zeitpunkt der Tests war dieser Einfluss des Anti-Aliasing-Filters auf die erfassten Messsignale nicht klar, sodass die erhaltenen Frequenzgänge zwar komplett ausgewertet werden, aber identifizierte Eigenformen über  $0,8f_{max} \approx 325$  Hz kritisch betrachtet werden sollten.

Die Anzahl der Spektrallinien  $N$  bestimmt automatisch die Frequenzauflösung  $\Delta f = f_{max}/N$  sowie den Messzeitraum mittels  $T_M = 1/\Delta f$ . Die Anzahl der Spektrallinien ist die maximal zur Auswahl stehende Anzahl in LMS Test.Lab 13A *Impact Testing*.

Als H-Schätzer wurde H1 ausgewählt, weil die Annahme beim Hammertest getroffen wird, dass die Antwort im Vergleich zu Erregung stärker fehlerbehaftet ist.

*Pre-Trigger Delay* (dt.: Vorauslösezeit) und Kraftfenster sind zwei Einstellungen zur zeitlichen Eingrenzung des gemessenen Kraftsignals für die Kraftspektrumsberechnung  $F(\Omega)$ . Üblicherweise wird das Kraftsignal  $f(t)$  vom Hammer ohne Unterbrechung gemessen und löst erst ab

Eigenform- Bezeichnung	Eigenfrequenz $f_0$ [Hz]	Dämpfungsgrad $D_{gen}$ [%]	Zeitkonstante $\tau$ [s]
2nWingBending	5,50	0,15 bis 0,3	19,29 bis 9,65
3nWingBending	14,91	0,15 bis 0,3	7,11 bis 3,56
WingTorsionAnti	31,96	0,15 bis 0,3	3,32 bis 1,66
WingTorsionSym	32,33	0,15 bis 0,3	3,28 bis 1,64
VtpBending	34,38	0,15 bis 0,3	3,09 bis 1,21

**Tabelle 6.5.:** Zeitkonstanten bei Eigenfrequenzen gemäß [17] und konservativ geschätzten generalisierten Dämpfungsmaßen

einem bestimmten Kraftniveau den Start der Messung des Antwortsignals aus. Der *Pre-Trigger Delay* ist die Zeit, die vor dem ausgelösten Start der Messung zur Frequenzspektrumsberechnung  $F(\Omega)$  mit einbezogen wird. Das Kraftfenster hingegen ist die Zeit, bis zu dessen Ende das Kraftsignal zur Frequenzspektrumsberechnung  $F(\Omega)$  mit einbezogen wird.

Für die Wichtungsfunktion des transienten Antwortsignals stehen die Möglichkeiten eines Rechteckfensters – also keine Wichtungsfunktion – oder eines Exponentialfensters zur Auswahl. Diese Möglichkeiten, ihre Auswirkungen und ihre Einflüsse werden in [44] sowie kurz in Kap. 3.2.3 erläutert. Die Auswahl hängt dabei in signifikanter Weise von der Zeitkonstante  $\tau_k$  der k-ten Eigenform sowie der modalen Dichte um die k-te Eigenform herum ab und beeinflusst die Frequenzgänge und dadurch die identifizierten modalen Parameter.

In [17] sind modale Parameter der elastischen Eigenformen der Laborstruktur aus früheren Versuchen bei einer ähnlichen frei-freien Ersatzlagerung aufgelistet. Daraus werden die Eigenkreisfrequenzen übernommen und die modalen Dämpfungsgrade konservativ auf 0,15 bis 0,3 geschätzt. In Tab. 6.5 sind die elastischen Eigenformen niedriger Eigenkreisfrequenz und ihre Zeitkonstanten  $\tau$  aufgelistet.

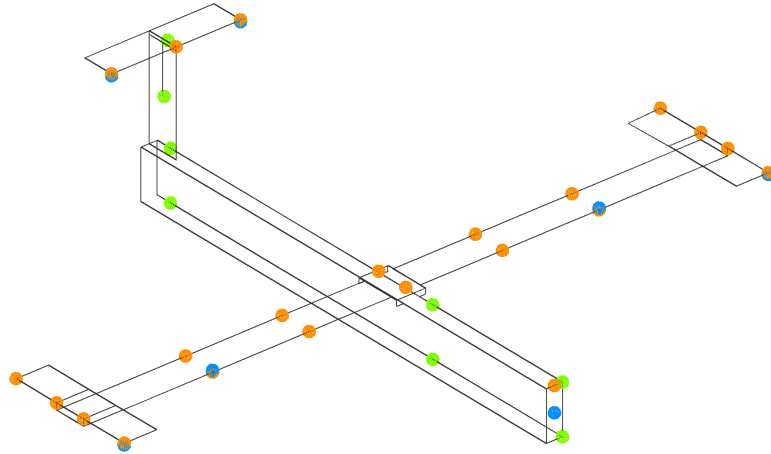
Die Empfehlung für den unbedenklichen Einsatz eines Rechteckfensters ist, dass  $\tau \geq \frac{1}{6}T_M$  sein sollte, um ein Frequenzspektrum ohne deutlichen Abschneidefehler zu erhalten [44]. Die Forderung wird ab der dritten elastischen Eigenform auch bei niedrigen Dämpfungsmaßen erfüllt. Die Forderung wird hingegen nicht von der ersten elastischen Eigenform bzw. der der zweiten elastischen Eigenform erfüllt, deren Zeitkonstanten etwa  $\tau_1 \approx T_M$  bzw.  $\tau_2 \approx \frac{1}{3}T_M$  entsprechen können.

Der Einsatz eines Exponentialfensters ist somit empfohlen. In Anlehnung an [44] wird ein schwaches Exponentialfenster mit einer Abklingrate von  $\chi = 5\%$  gewählt.

Dieses Exponentialfenster wird ebenfalls auf das Kraftsignal gegeben. Dies hat keine Auswirkung auf die Eigenkreisfrequenz oder den modalen Dämpfungsgrad, führt aber vor allem bei Verwendung eines *Pre-Trigger Delays* zu exakteren Frequenzgangsverläufen und dadurch genauer identifizierten Residuen [13].

Mit der zur Verfügung stehenden Messapparatur müssen in einem nächsten Schritt **Sensoren**





**Abbildung 6.13.:** Ehemalige Belegung der Sensoren, die in eigenen Bohrungen installiert werden können (blau - x-Richtung, grün - y-Richtung, orange - z-Richtung)

geeignet **platziert** werden. 37 Sensoren wurden in früheren Messungen verwendet und konnten zur Identifikation aller 26 elastischen Eigenformen der Laborstruktur bis 400 Hz verwendet werden [17]. Sie können an eigens dafür angelegten Bohrungen, die höchste Einsatzfähigkeit der Sensoren garantieren, installiert werden.

Die ehemalige Sensorbelegung mit 37 Sensoren kann in [17] nachgelesen werden und ist in [Abb. 6.13](#) ebenfalls dargestellt. Weitere Sensoren stehen für eine Platzierung zusätzlich zur ehemaligen Belegung zur Verfügung.

Wie im [Kap. A.3](#) erkennbar ist, ist der Flügel die dominante Struktur an der Laborstruktur. Er zeigt Biege- und Torsionsverformungen sehr hoher Ordnung auf. Bei etwa 260 Hz ergeben sich beispielsweise symmetrische und antisymmetrische Biegeformen 4. Ordnung, die auch in Eigenformen höherer Frequenzen wiederzuerkennen sind.

Daher werden zusätzliche Sensoren insbesondere am Flügel angebracht, um Eigenformen besser darstellen und modale Eigenschaften leichter identifizieren zu können [11].

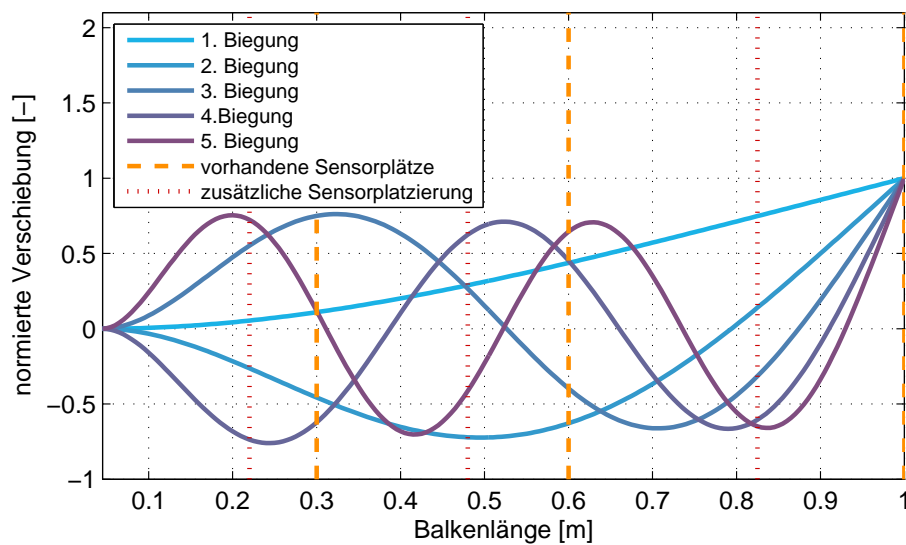
Für die reine Biegeverformung kann die Flügel-Substruktur als einseitig eingespannter Balkenkontinuum der Länge  $l = 0,955\text{m}$  mit der Ortskoordinate  $y$  vereinfacht werden. Sie weist dann kontinuierliche Biegeeigenformen

$$\phi_n(y) = \frac{\cosh(\lambda_n y) - \cos(\lambda_n y)}{\cosh(\lambda_n l) - \cos(\lambda_n l)} - \frac{\sinh(\lambda_n y) - \sin(\lambda_n y)}{\sinh(\lambda_n l) - \sin(\lambda_n l)} \quad (6.2)$$

auf, wobei sich  $\lambda_n$  aus der Eigenwertgleichung ergibt [16].

$$0 \stackrel{!}{=} 1 + \cos(\lambda_n l) \cosh(\lambda_n l) \quad (6.3)$$

In [Abb. 6.14](#) sind die Biegeeigenformen sowie die entsprechende ehemalige sowie zusätzliche Sensorbelegung dargestellt. Die 1. bis 3. Biegung kann sehr gut durch die bereits in [17]



**Abbildung 6.14.:** Biegeeigenformen eines eingespannten Kragbalkens der Länge  $l = 0.955\text{m}$  sowie bestehende und zusätzlich ausgewählte Sensorplatzierung

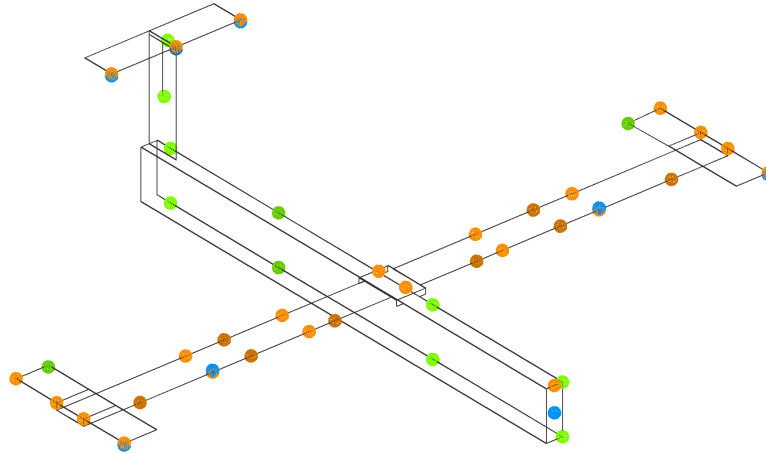
verwendeten Sensoren wiedergegeben werden. Die 4. Biegung kann noch gut erkannt werden, denn sie erfasst relativ exakt zwei der drei Schwingungsbäuche. Die 5. Biegung kann dagegen vielleicht noch identifiziert, aber nicht mehr dargestellt werden, denn der rumpfnah Sensor liegt in einer Nullstelle und beide Sensoren erfassen aufgrund ihrer Position die 5. Biegung wie die 1. Biegung.

Es wurden daher Sensorpositionen am Außen- und am Innenflügel ausgewählt, um die Schwingungsbäuche der 4. und 5. Biegung besser zu erfassen. Hinzu kommen zwei zusätzliche Sensoren auf halber Flügelspannweite an vorderer und hinterer Flügelkante, um alle anderen Biegeeigenformen besser beschreiben zu können sowie komplizierte Torsionseigenformen wie in Kap. A.3 zu unterscheiden. Die exakten Positionen wurden an den Punkten gewählt, an denen das entsprechende FE-Modell Knoten besitzt [11].

Zwei weitere Sensoren in y-Richtung an den rumpfnahen Winglet-Spitzen sollen Schwenkbewegungen des Flügels besser beschreiben. Zwei Sensoren in y-Richtung am Rumpf sollen Rumpfeinflüsse in den Eigenformen besser beschreiben. Ein zusätzlicher Sensor in x-Richtung am Leitwerkskreuz soll die Leitwerkeinflüsse in den Eigenformen besser beschreiben.

Diese zusätzlichen 13 Sensoren besitzen keine eigenen Bohrungen. Sie wurden daher mit den mitgelieferten Sensorsockeln und dem Spezialsekundenkleber von PCB an die Struktur gemäß den Vorgaben in [33] installiert. Die komplette Sensorbelegung inklusive zusätzlich installierter Sensoren ist in Abb. 6.15 dargestellt. Der Sensorplan mit Kennung und genaueren Koordinaten befindet sich im Anhang in Kap. A.4.

Eine Aussage, ob die elastischen Eigenformen durch die zusätzlichen Sensoren besser beschrieben werden können, lässt sich mittels des MAC-Kriteriums aus Kap. 3.3.2 machen [39]. Sie



**Abbildung 6.15.:** Ergänzte Belegung der Sensoren (blau - x-Richtung, grün - y-Richtung, orange - z-Richtung; zusätzliche Sensoren in dunklerer Farbe)

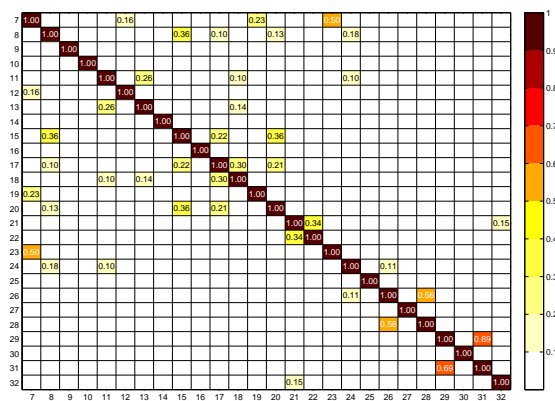
wird mithilfe des anfänglich verfügbaren FE-Modells der Gesamtstruktur (s. Abb. 6.2), der Substruktur Flügel und der Substruktur Rumpf-Leitwerk – beide am Flügelkasten fest eingespannt – getroffen. Keine der Modellierungen besitzt exakt die Randbedingungen der Testumgebung, sind aber grundlegend ausreichend für die erstrebte Aussage der Beschreibung kennzeichnender Eigenformen.

Die so genannten Auto-MAC-Matrizen sind in Abb. 6.16 dargestellt. Auf der linken Seite stehen die eingefärbten Matrizen, die mit 37 Eigenvektorelementen der jeweiligen kartesischen Koordinate entsprechend der installierten gebohrten Sensoren berechnet wurden. Auf der rechten Seite stehen die eingefärbten Matrizen, die mit 50 Eigenvektorelementen entsprechend der neuen Sensorkonfiguration berechnet wurde.

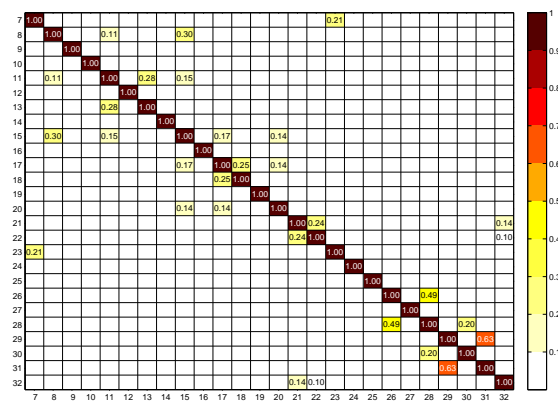
Da bei jeder Auto-MAC-Matrix lediglich die Selbstähnlichkeit der Eigenvektoren eines FE-Modells untereinander berechnet wird, ist die Hauptdiagonale jeder Auto-MAC-Matrix automatisch exakt 1. Die Nebendiagonalen sind symmetrisch und geben Aufschluss, wie gut sich Beschreibungen der jeweiligen Eigenformen durch die begrenzte Anzahl der Eigenvektorelemente unterscheiden lassen.

Bei der Gesamtstruktur lassen sich in Abb. 6.16a wie erwartet modal nebeneinander liegende Eigenformen durch die ursprüngliche Sensorbelegung gut voneinander trennen. Größere Übereinstimmungen finden sich bei niederen Eigenformen dagegen in weiter entfernten Nebendiagonalen, sowie bei eng beieinander liegenden, höherfrequenten Eigenformen. Die erhöhte Sensorzahl am Flügel zeigt in Abb. 6.16b den erwünschten Effekt, dass sich Flügeleigenformen höherer Ordnung besser von den Flügeleigenformen niedriger Ordnung unterscheiden lassen. Außerdem können ähnliche höherfrequente Flügeleigenformen, die eine hohe modale Dichte aufweisen, etwas besser voneinander unterschieden werden.

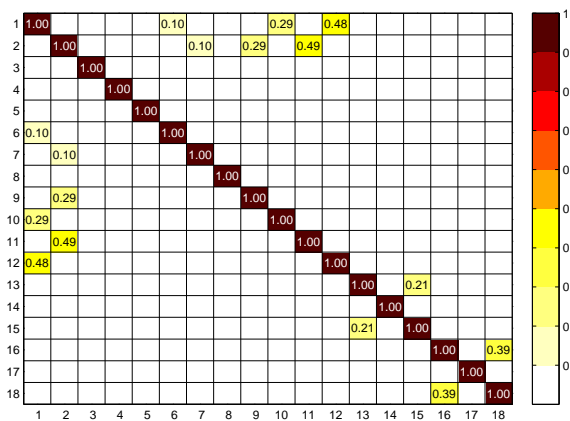
Bei der eingespannten Flügel-Substruktur kann man in Abb. 6.16c und Abb. 6.16d die gleiche



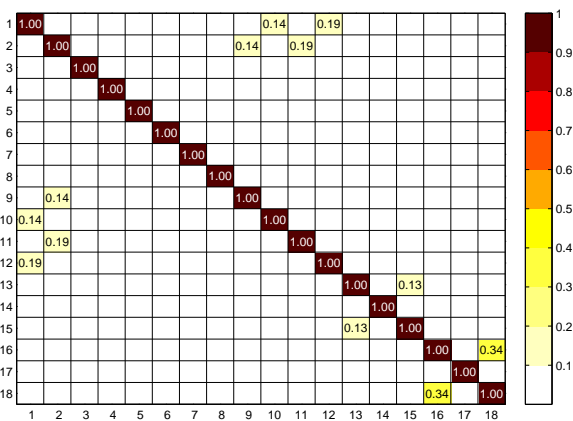
(a) Gesamtstruktur: 37 Sensoren



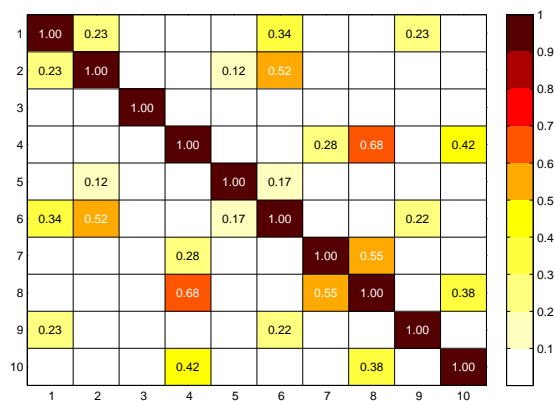
(b) Gesamtstruktur: 50 Sensoren



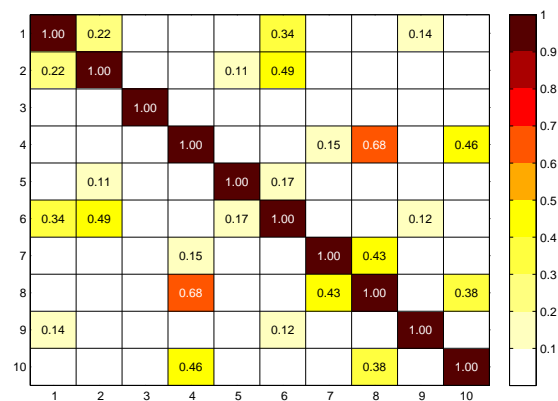
(c) Flügel-Substruktur: 22 Sensoren



(d) Flügel-Substruktur: 32 Sensoren

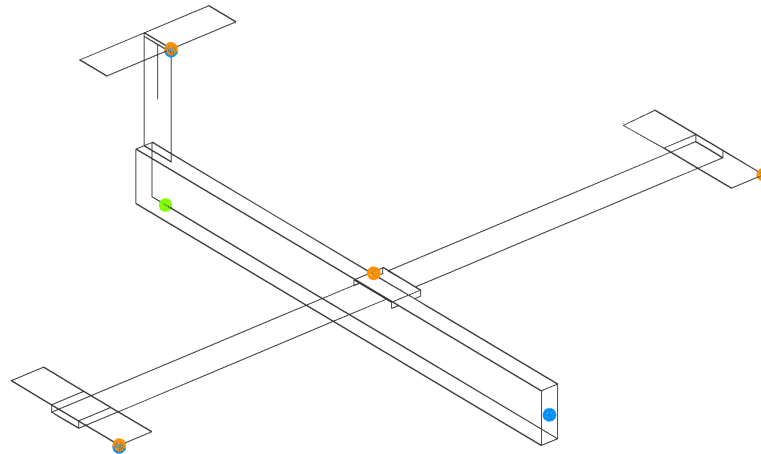


(e) Rumpf-Leitwerk-Substruktur: 15 Sensoren



(f) Rumpf-Leitwerk-Substruktur: 18 Sensoren

**Abbildung 6.16.:** Auto-MAC-Matrizen der elastischen Eigenformen von AIRMOD und seinen Substrukturen, links mit alter Sensorbelegung, rechts mit zusätzlichen Sensoren



**Abbildung 6.17.:** Erregerpunkte (blau - x-Richtung, grün - y-Richtung, orange - z-Richtung)

Verbesserung erkennen.

Bei der eingespannten Rumpf-Leitwerk-Substruktur wurde die Sensorzahl lediglich von 15 auf 18 erhöht, sodass die Auto-MAC-Matrix in [Abb. 6.16f](#) ein nur minimal besseres Ergebnis gegenüber [Abb. 6.16e](#) zeigt. Die größte Verbesserung konnte zur Unterscheidung der benachbarten Leitwerksschwingungen erzielt werden.

Nach der endgültigen Sensorplatzierung ist der nächste Schritt die **Erregerpunktauswahl**.

Gute Erregerpunkte sind durch Orte gekennzeichnet, an denen möglichst viele Eigenformen Verschiebungen aufweisen [47]. Mindestens drei Erregerpunkte für jede Raumrichtung sollten ausgewählt werden, damit Eigenformen, die ausschließlich in eine der drei Raumrichtungen Verschiebungen aufweisen, optimal angeregt werden. Sie sollten außerdem bei einer symmetrischen Struktur wie AIRMOD jeweils symmetrische und antisymmetrische Eigenformen gut anregen, sodass Schlagpunkte in der Symmetrieebene und außerhalb gewählt werden sollten. Bei lokal begrenzten, unsymmetrischen Eigenformen, die auch gemäß [17] an der Flügelstruktur auftreten können, sollten extra Erregerpunkte gewählt werden.

Entsprechend den Eigenformen in [Kap. A.3](#) wurden die Erregerpunkte ausgewählt und sind in [Abb. 6.17](#) dargestellt. Ihre genaue Position ist jeweils für die Gesamtstruktur und die Substrukturen in [Kap. A.5](#) aufgelistet.

Der Testaufbau ist in [Abb. 6.18](#) dargestellt. Gut zu erkennen sind das Item-Gestell, die Bungee-Seile, die eingehängte Laborstruktur AIRMOD und die Sensorkabel der 50 Sensoren.

Die Sensoren am Flügel wurden auf der Unterseite installiert, um für eine spätere Dämpfungsbehandlung durchgängig Platz auf der Oberseite zu lassen.

Die Bungee-Seile wurden bei den Tests 1, 2, 7 und 8, bei denen Flügel und Gesamtstruktur



**Abbildung 6.18.:** Aufbau für T1C0, mit item-Gestell und doppelt geführten Bungee-Seilen (hier auf Ständern gelagert)

jeweils bei frei-freier Ersatzlagerung getestet werden, so installiert, dass die Symmetrieebene des AIRMOD annähernd orthogonal zum Gestell ist bzw. die Flügel parallel zum Boden liegen, damit Starrkörpereigenformen der Datensätze einzelnen Koordinaten besser zugeordnet werden können.

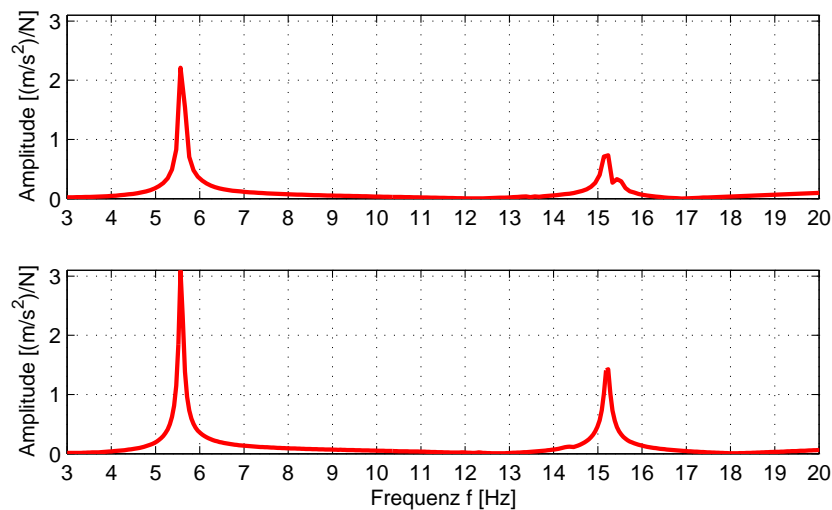
Die Bungee-Seile wurden doppelt geführt, da sich das Verhalten der Bungee-Seile bei einfacher Führung durch die große Längsdehnung infolge des Strukturgewichts in den nichtlinearen Bereich verschiebt. Dieses nichtlineare Verhalten konnte bei ersten Vortests im Frequenzgang erkannt werden.

In [Abb. 6.19](#) sind Amplitudengänge bei gleichem Erreger- und Messpunkt im Bereich 3 bis 20 Hz gezeigt, oben bei einfach geführtem und unten bei doppelt geführten Bungee-Seilen. Sie zeigen Resonanzspitzen bei etwa 5,5 Hz und bei etwa 15,2 Hz, wo die jeweils erste und zweite elastische Eigenform erwartet werden.

Im oberen Diagramm zeigt sich bei der zweiten Resonanzspitze eine starke Verzerrung, wie sich bei Nichtlinearitäten typisch sind [12]. Dieser unerwartete Einfluss wurde den Bungee-Seilen zugeschrieben, weshalb deshalb eine veränderte Lagerung mit doppelt geführten Bungee-Seilen gewählt wurde. Mit der veränderten Lagerung konnte die Nichtlinearität beseitigt werden.

Die Vortests zeigten ebenfalls, dass Starrkörpereigenformen nicht über 1,5 Hz auftreten und somit niederfrequent genug sind, dass sie nur vernachlässigbaren Einfluss auf die elastischen Eigenformen haben.

Als problematisch hat sich der Messpunkt 010201 gezeigt. Sensoren an diesem Messpunkt zeigten nur dort im Bereich unter 10 Hz ein nicht nachvollziehbares Schwingungsverhalten,



**Abbildung 6.19.:** Amplitudengang zwischen 3 und 20 Hz (Erregerpunkt H01, Sensorposition 030202) bei einfach (oben) und doppelt (unten) geführten Bungee-Seilen

obwohl sie mehrmals überprüft und auch ausgetauscht wurden. Dies konnte nicht gelöst werden und ist in den später identifizierten Eigenformen, bspw. in [Abb. A.7e](#) und in [Abb. A.11a](#), zu sehen.

### 6.3.2. Durchführung

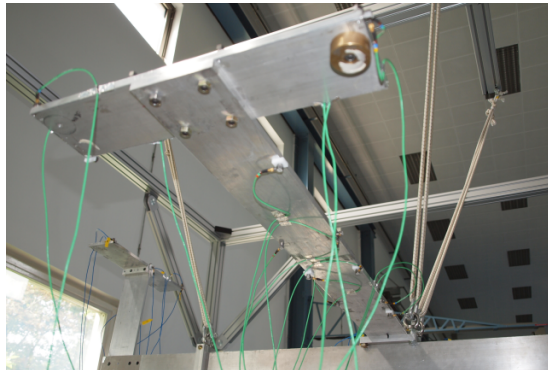
Mit dem Abschluss der Testvorbereitungen wurden die Hammertests entsprechend der Reihenfolge in [Tab. 6.3](#) durchgeführt. Bilder der Testumgebungen sind im Anhang in [Kap. A.6](#) aufgeführt. Auf Besonderheiten bei der Testdurchführung wird in diesem Unterabschnitt im Allgemeinen und im Speziellen eingegangen.

Allgemein wurden während jedes Tests gemäß [Kap. 3.2.4](#) die individuellen **Testbedingungen** konstant gehalten und die Theorie beachtet, um eine sehr gute Kohärenz der Messsignale zu gewährleisten.

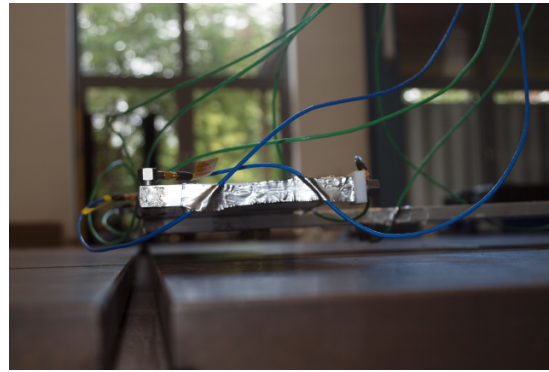
Die **Sensoren** wurden beim Übergang von einem Test zum nächsten nicht abmontiert, um lokale Veränderungen an der Struktur zu vermeiden.

Die **Kabelabführungen** wurden zwischen den Tests abmontiert und vor Beginn jedes Tests auf ihre Lagerung geprüft. Nah am Sensor wurden sie an der Struktur allgemein mit Aluminium-Klebeband befestigt, um Störsignale auf das Messsignal der Piezosensoren durch nah an der Struktur mitschwingende Kabelabschnitte zu vermeiden. Sie dürfen nicht gespannt sein, um das Einbringen von Steifigkeit zu vermeiden. Ganz wichtig für diese Untersuchung war, dass sie in der Nähe der Struktur möglichst nicht





(a) Kabelabführungen beim Gestell



(b) Kabelabführungen beim Fundament

**Abbildung 6.20.:** Kabelabführungen

- an anderen Objekten oder Kabeln reiben, was ähnlich wie ein lokaler viskoser Dämpfer die Struktur ungewollt dämpft, oder
- während der Schwingung ab und zu in Kontakt mit anderen Kabeln treten und auf diese Weise künstlich eine Nichtlinearität in die Struktur einbringen.

Störungen dieser Art mussten vermieden werden, um insbesondere unbeeinflusste modale Dämpfungsmaße identifizieren zu können.

In diesem Bezug wiesen die Tests T5C1 und T6C1, bei denen die Flügelstruktur auf dem luftgelagerten Fundament fest installiert war, sehr geringe Abstände zwischen Sensoren mit Kabelabführungen und Fundamentoberfläche auf. Besonders diese Tests wurden sehr genau auf die Kabelabführungen geprüft. Abb. 6.20 soll die genannten Anstrengungen verdeutlichen.

Außerdem haben in [17] eine sehr große Anzahl an Modaltests an der Gesamtstruktur gezeigt, dass sich vor allem die modalen Dämpfungsgrade ändern, wenn die Struktur auseinandergebaut und neu zusammengefügt wird.

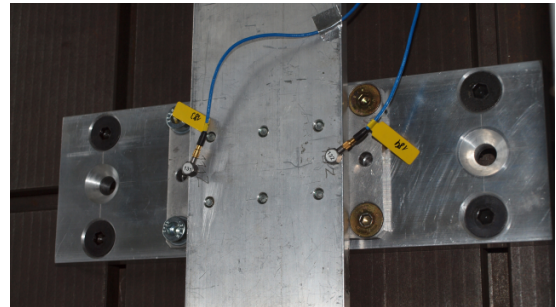
Aus diesem Grund stellt die **Schraubverbindung** von oberem und unterem Flügelkasten einen weiteren wichtigen Punkt dar. Diese Schraubverbindung wurde nach dem ersten Test T1C0 gelöst. Für die Tests T4C2, T5C1 und T6C1 wurde diese Schraubverbindung für jede Substruktur auf einem auf dem Fundament verspannten Adapter aus Aluminium reproduziert. Danach wurde sie wieder gelöst und für den letzten Test T8C0 wieder zur ursprünglichen Verbindung gebildet.

Dieser Adapter ist eine Aluminiumplatte der Dicke 3 cm, auf der mittels Gewinden und Aussparungen beide Substrukturen jeweils mit den gleichen Schrauben wie bei der Verbindung von unterem und oberem Flügelkasten bei der Gesamtstruktur aufgeschraubt werden können. Er kann die Flügelkasten-Durchsteckverbindung nicht exakt reproduzieren, da es sich bei der Adapter-Verschraubung um eine Einschraubverbindung handelt. In Abb. 6.21 ist der Adapter und die Verschraubung jeweils für Flügel und Rumpf-Leitwerk näher dargestellt.





(a) Adapter bei T4C2



(b) Adapter bei T5C1 und T6C1

**Abbildung 6.21.:** Adapter aus Aluminium zur Verschraubung der Substrukturen auf Fundament

Basierend auf den Ergebnissen von [17] sollte die Schraubverbindung also in jeder relevanten Testkonfiguration die gleichen Klemmkräfte aufweisen. Dafür standen zwei mechanisch gesteuerte Drehmomentenschlüssel mit einem erlaubten Höchstanziehdrehmoment bis 35 Nm zur Verfügung.

Bei der Schraubverbindung der Flügelkasten-Abschnitte handelt es sich um zwei DIN912 Zylinderkopfschrauben M10x50 mit Innensechskant und zwei DIN7991 Senkkopfschrauben M10x25 mit Innensechskant. Für die folgenden Auslegeberechnungen werden sie alle als Zylinderkopfschrauben angesehen.

Um das Anziehdrehmoment zu berechnen, wird zuerst ein mechanisches Modell des AIRMOD aufgebaut, um die statische Belastung an der Schraubverbindung durch das Gewicht des AIRMOD zu berechnen. Mithilfe der berechneten statischen Belastung und konservativ geschätzten dynamischen Belastungen werden Betriebslasten errechnet. Die letztendlich erforderlichen Klemmkräfte werden mit der erforderlichen Sicherheit gegen Fließen festgelegt. Mithilfe der erforderlichen Klemmkräfte, der Schrauben-, Gewinde- und Platteneigenschaften kann für jede individuelle Schraubverbindung in den verschiedenen Tests die nötige Vorspannkraft sowie das erforderliche und das zulässige Anziehdrehmoment errechnet werden, um die erforderlichen Klemmkräfte zu gewährleisten [32][20].

Die Anziehdrehmomente erwiesen sich dabei als sehr weit unter dem jeweils zulässigen Anziehdrehmoment. Ein zu geringes Anziehen solcher überdimensionierter Schrauben und somit eine zu geringe Vorspannkraft kann unter Belastung aber zum Aufklaffen der verspannten Bauteile, zum Losdrehen und zum Setzen führen [32]. Einhergehend damit führt dies zu relativ starken Relativbewegungen in den Teilfugen und somit zu starken nichtlinearen Reibungseffekten [8].

Um diesen Effekten niedriger Vorspannkraft zu entgegen zu wirken, muss eine möglichst hohe Vorspannung in allen Betriebszuständen herrschen. Eine hohe Vorspannung kann den Betriebszustand der Schraube vollständig ausnutzen und genug Haftreibung erzeugen, dass Relativbewegungen vermieden werden [32]. Deshalb wurden die erforderliche Klemmkraft erhöht und Vorspannkkräfte sowie Anziehdrehmomente neu errechnet.

In Tab. 6.6 sind die errechneten und auch verwendeten Anziehdrehmomente bei einer Klemm-

Test-Kennung	Klemmkraft [N]	Anziehdrehmoment Zylinderkopf [Nm]	Anziehdrehmoment Senkkopf [Nm]
T1C0 und T8C0	5500	24,6	31,7
T4C2	5500	20,4	–
T5C1 und T6C1	5500	20	23

**Tabelle 6.6.:** Anziehdrehmomente der Schraubverbindungen bei den einzelnen Tests

kraft von 5500 N je individueller Schraubverbindung aufgelistet. Es ist zu beachten, dass beim Test T4C2 keine Senkkopfschrauben verwendet werden konnten, da der Flügelkasten-Abschnitt der Rumpf-Leitwerk-Struktur C2 keine Senkungen aufweist. Außerdem basieren die errechneten Drehmomente auf abstrahierten Modellen und es standen keine leistungsfähigen Montagewerkzeuge zur Verfügung, sodass die errechneten Werte in Theorie und Praxis Unsicherheiten unterliegen.

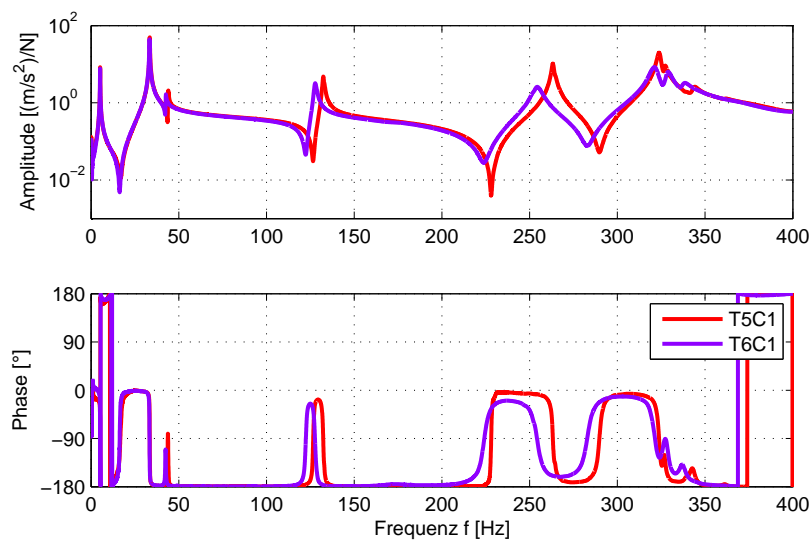
Für die **Dämpfungsbehandlung** sollte eine dämpfungserzeugende Schicht auf der Oberseite des Flügels angebracht werden. Diese Schicht sollte optimalerweise alle oder zumindest eine deutliche Anzahl an modalen Dämpfungsmaße erhöhen.

Viskoelastische Materialien dämpfen Schwingungen, indem sie bei einer Streckung Dehnungsenergie aufnehmen und in Wärme umwandeln. Wird eine Struktur mit angebrachten viskoelastischen Materialien Biegung oder Biegeschwingungen ausgesetzt, werden die viskoelastischen Materialien deformiert und gedehnt, sodass die mechanische Energie der Struktur schneller dissipiert [9].

Eine Dämpfungsbehandlung bezeichnet die Anbringung eines in der Regel viskoelastischen Materials oder einer Kombination von Materialien an eine Struktur, um Schwingungen zu dämpfen. Sie wird in *Free-Layer Damping* (dt.: Freiliegende Dämpfungsschicht, Abk. FLD) und in *Constrained-Layer Damping* (dt.: Eingespannte Dämpfungsschicht, Abk. CLD) unterschieden, wobei CLD stärker dämpft als FLD. Bei FLD wird viskoelastisches Material fest mittels eines Klebstoffes mit einer Struktur verbunden und dissipiert mechanische Energie allein durch Dehnung und Kompression des Materials. Bei CLD wird viskoelastisches Material ebenfalls mit der Struktur fest mittels Klebung verbunden und mit einer weiteren, dünnen Schicht eines steifen Materials fest überzogen, wodurch vor allem durch Schubverformung mechanische Energie dissipiert [9].

Üblicherweise verwendete viskoelastische Materialien sind Gummimischungen, Acryl, Nitril-Phenolharz und Polyurethan. Ihre Dämpfungseigenschaften, üblicherweise zusammengefasst im Verlustmodul  $E''$ , variieren stark mit Temperatur und Frequenz [9].

In der ursprünglichen GARTEUR-Studie wurden alle Eigenformen des AIRMOD durch CLD auf dem Flügel mittels einer fest installierten Acrylfolie und einer spannenden Aluminiummembran effektiv gedämpft, um die modalen Dämpfungsmaße an die eines tatsächlichen Zivilflugzeugs anzunähern [18]. CLD ist im Rahmen dieser Arbeit weder gefordert noch mit den verfügbaren Hilfsmitteln technisch flexibel umsetzbar. Daher wird FLD angewandt.



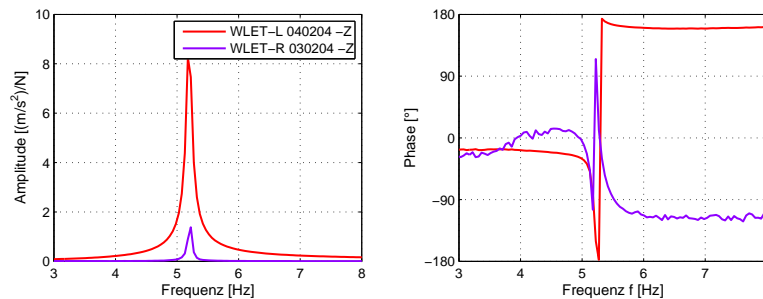
**Abbildung 6.22.:** Amplituden- und Phasengang von 0 bis  $f_{max}$  (Erregerpunkt H11, Sensorposition 040202) bei eingespanntem Flügel ohne und mit Behandlung durch FLD

Die Dämpfungswirkung von FLD steigt, wenn die Schicht sehr gut verbunden ist und eine große Dicke und eine gewisse Steifigkeit aufweist, damit die Schicht mechanische Energie aufnehmen kann. Die Wirkung steigt außerdem, wenn die Schicht in Bereichen der Struktur, die starke Biegeeigenformen aufweist, eingesetzt wird [9]. Für FLD des Flügels wurde daher 5 cm dicker Polyurethan-Schaum mit doppelseitigem Kleband an den Flügeloberseiten ohne Mittelflügel befestigt.

In [Abb. 6.22](#) sind die Amplituden- und Phasengänge des eingespannten Flügels bei identischen Erreger- und Messpunkten über den gesamten Frequenzbereich dargestellt, in rot beim Test T5C1 ohne und in violett beim Test T6C1 mit FLD. Sie zeigen zum einen, dass die zusätzliche Massenbelegung der Struktur eine Abminderung der Eigenfrequenzen, erkennbar an den gewanderten Resonanzspitzen, zur Folge hat. Sie zeigen außerdem, dass Eigenformen ab etwa 200 Hz erfolgreich gedämpft werden, erkennbar an den breiteren Resonanzspitzen sowie an den flacheren Durchgängen der Phase bei  $-90^\circ$ . Eine genauere Betrachtung kann aber erst nach der Identifikation der modalen Eigenschaften erfolgen.

Ein **Problem** der Anregung brachte der Testaufbau zur eingespannten Flügel-Substruktur in T5C1 und T6C1 mit sich. Es äußerte sich darin, dass der Großteil der Energie des Hammerschlages am Mittelflügel durch die Schraubverbindung mit dem Adapter in das Fundament geleitet wurde und verloren ging. Dies hatte zum Einen zur Folge, dass eine Anregung symmetrischer Eigenformen, speziell am Erregerpunkt H13, nur stark verrauschte Messdaten erzeugt. Zum anderen bewirkte dies, dass Eigenformen nicht über die gesamte Substruktur hin gleichmäßig angeregt werden konnten.

Beispielhaft für das Problem werden in [Abb. 6.23](#) die Amplitudengänge an zwei Messpunkten



**Abbildung 6.23.:** Frequenzgänge der eingespannten, unbeschichteten Flügelstruktur aus Test T5C1 (Erregerpunkt H11) sowie identifizierte symmetrische Flügelbiegung

stellvertretend für die gegenüberliegenden Winglet-Spitzen dargestellt. Sie zeigen beide eine Resonanzspitze im Amplitudengang und eine doppelte Phasenverschiebung um  $180^\circ$  bei etwa 5,2 Hz, wo die erste symmetrische und antisymmetrische Flügelbiegung erwartet werden. Sie haben aber eine deutlich unterschiedliche Amplitude, die nicht ausschließlich mit der einseitigen Anregung zu erklären ist, sondern ihre Ursache in der Einspannung hat.

Nach den erfolgreich durchgeführten Modaltests folgte die **Identifikation der modalen Eigenschaften** mit den erhaltenen Frequenzgängen. Diese Auswertung wurde mithilfe der Software LMS Test.Lab 13A *Modal Analysis* unter Beachtung der dargelegten Theorie in [Kap. 3.3.1](#) für jeden Test und jeden Erregerpunkt einzeln durchgeführt. Sie wurde jeweils für den gesamten Frequenzbereich von 0 bis  $f_{max} = 400$  Hz, der wiederum in 5 bis 8 Unterbereiche aufgeteilt wurde, durchgeführt. Sie wurde daraufhin mit den Qualitätsindikatoren aus [Kap. 3.3.2](#) auf ihre Qualität geprüft und gegebenenfalls wiederholt.

Für jeden Test ergaben sich aus der Auswertung mit LMS Test.Lab entsprechend der Zahl der Erregerpunkte für jeden Test mehrere modale Modelle. Die einzelnen modalen Modelle mussten für jeden Test mithilfe ihrer Qualitätsindikatoren verglichen werden, um aus der Gesamtmenge der unvollständigen modalen Modelle ein vollständiges, hochwertiges modales Modell des Tests zu bilden.

Der manuelle Vergleich der modalen Modelle jeden Tests geschah mithilfe der Software des DLR *Correlation Tool* 4.4, das einen Vergleich modaler Modelle vereinfacht.

### 6.3.3. Ergebnisse

Die wichtigsten Ergebnisse kommen aus den Tests der frei-frei gelagerten Gesamtstruktur T1C0 und der eingespannten Substrukturen T4C2 und T5C1, weil sie für die folgenden Analysen von grundlegender Bedeutung sind. Wichtige Ergebnisse kommen auch aus dem Test der dämpfungsbehandelten eingespannten Flügel-Substruktur T6C1 sowie aus dem Test der dämpfungsbehandelten Gesamtstruktur T8C0, da sie die Grundlage für einen möglichen zweiten, vergleichbaren Datensatz darstellen. Alle anderen Tests, deren Ergebnisse in [Kap. A.6](#)

	<i>Wing</i>		<i>Torsion</i>		<i>-S</i>	<i>2</i>
<i>2n</i>	<i>Fuselage</i>	<i>Lateral</i>	<i>Bending</i>		<i>-A</i>	
	<i>Winglet</i>		<i>Bending</i>	<i>Left</i>	<i>-U</i>	
Anzahl der Schwingungsknoten (nur Biegung)	dominante Komponente	Räumliche Bewegungsrichtung	dominante Bewegung	begrenzt auf ...	(anti-/un)symmetrische Eigenform	Grad der Torsion (nur Torsion)

Tabelle 6.7.: Schlüssel zur Bezeichnung der elastischen Eigenformen

eingesehen werden könne, spielen für die weitere Behandlung keine weitere Rolle und werden deshalb nicht weiter ausgewertet.

Die modalen Eigenschaften der Eigenformen der frei-frei gelagerten Gesamtstruktur und der eingespannten Substrukturen, die aus den Tests T1C0, T5C1 und T6C2 identifiziert wurden, sind jeweils in [Tab. 6.8](#), [Tab. 6.9](#) und [Tab. 6.10](#) aufsteigend nach der Eigenfrequenz  $f_0$  aufgelistet. Ein Schlüssel zur Bezeichnung der elastischen Eigenformen ist in [Tab. 6.7](#) mit zwei Beispielen gegeben und ist in abgeänderter Form aus [17] übernommen.

Starrkörpereigenformen (engl.: Rigid Body Mode, Abk. RBM) wurden bis zur unteren Arbeitsgrenze der verwendeten Piezosensoren, einer Frequenz von etwa 0,5 Hz, gefunden. Sie werden unterschieden in solche, die die Bungee-Seile stark belasten – *Yaw* (dt.: gieren), *Heave* (dt.: heben), *Pitch* (dt.: steigen) – und solche, die die Bungee-Seile sehr schwach belasten und lediglich eine Pendelbewegung im Raum darstellen – *Surge* (dt.: vorpreschen), *Side* (dt.: schlängeln, seitlich bewegen).

Die zum Test gehörigen AutoMAC-Matrizen sind in [Abb. 6.24](#) dargestellt und sind mit reellen Eigenvektoren, die mittels Gl. (3.45) erhalten worden sind, berechnet worden. Sie ermöglichen eine Bewertung der linearen Unabhängigkeit der identifizierten Eigenschwingungsformen.

Die identifizierten Eigenformen der wichtigsten Tests sind in [Kap. A.8](#), [Kap. A.9](#) und [Kap. A.10](#) in Abbildungen dargestellt.

Bei T1C0 wurden alle elastischen Eigenformen, die in [17] identifiziert wurden, auch gefunden. Die Eigenformen bis 260 Hz sind sehr schwach komplex und damit sehr gut identifiziert. Erst über 260 Hz nimmt die Qualität aufgrund der hohen modalen Dichte teils stark ab. Die entsprechend mäßigen Werte der Qualitätsindikatoren sind rot eingerahmt. Die modalen Massen, die für diesen Test mit [17] verglichen werden können, weisen eine gute Übereinstimmung auf.

Von den sechs möglichen RBM sind vier entdeckt worden. Die RBM mit der niedrigsten Frequenz ist sehr stark komplex, sodass ihre modalen Eigenschaften nicht verlässlich sind. Die RBM mit der höchsten Frequenz liegt bei 0,98 Hz und ist mit guter Qualität identifiziert worden. Sie ist damit weniger als  $\frac{1}{5}f_{max}$ . Sie ist außerdem die einzig verlässlich identifizierte RBM, die das Bungee stark belastet, sodass der modale Dämpfungsgrad allein dieser RBM die Dämpfungswirkung der Bungees beschreibt.

Eigenform-Bezeichnung	$f_0$ [Hz]	$D_{gen}$ [%]	MPC [%]	MPD [°]	Phase $a_{gen}$ [°]	$m_{gen}$ [kgm <sup>2</sup> ]
(1) RBM Yaw	0,42	1,01	93,94	15,69	-122,03	21,07
(2) RBM Sidle	0,70	2,16	99,68	3,20	-88,86	3,77
(3) RBM Surge	0,87	3,53	98,26	12,73	-91,20	24,17
(4) RBM Heave	0,98	6,33	99,47	3,07	-100,28	17,61
(5) 2nWingBending-S	5,52	0,36	100,00	0,31	-87,23	4,48
(6) 3nWingBending-A	15,15	0,30	100,00	0,17	-88,40	4,37
(7) WingTorsion-A	32,73	0,28	99,75	2,87	-93,29	1,03
(8) WingTorsion-S	33,09	0,35	99,85	2,20	-92,95	0,93
(9) VTPBending-A	34,99	0,44	99,97	1,07	-89,30	2,23
(10) 4nWingBending-S	44,56	0,49	100,00	0,36	-88,92	2,60
(11) 1nWingForeAftBending-A	47,70	0,24	99,91	1,75	-82,46	6,02
(12) 2nWingForeAftBending-S	52,35	0,17	99,98	0,82	-89,73	4,29
(13) 5nWingBending-A	59,11	0,53	99,99	0,50	-88,35	3,51
(14) VTP Torsion-A	67,81	0,17	99,99	0,76	-93,23	0,69
(15) 2nFuselageLateralBending-A	100,08	0,56	99,98	0,89	-85,73	0,95
(16) 2nVTPBending-A	125,35	0,62	99,97	1,02	-91,31	1,82
(17) 6nWingBending-S	131,87	0,44	100,00	0,24	-89,61	2,68
(18) 7nWingBending-A	142,30	0,67	99,97	1,04	-92,52	4,04
(19) 2nHTPBending-S	206,60	1,17	99,91	1,73	-88,34	0,44
(20) HTPForeAftBending-S	226,21	0,44	99,73	2,88	-98,17	1,60
(21) WingBendingRight-U	262,42	0,63	99,98	0,86	-89,77	1,38
(22) WingBendingLeft-U	262,68	0,43	98,56	10,03	-23,57	4,63
(23) 3nWingForeAftBending-A	276,91	0,29	99,86	2,15	-80,25	6,11
(24) 3nFuselageLateralBending-A	318,58	0,38	95,30	13,05	-50,68	7,30
(25) WingletBendingRight-U	319,03	0,37	99,76	3,17	-75,43	1,18
(26) WingletBendingLeft-U	323,17	0,55	99,81	2,70	-73,75	3,38
(27) WingTorsion-S2	338,09	0,50	99,95	1,35	-79,69	1,22
(28) WingTorsion-A2	340,39	0,46	98,27	7,82	-16,75	2,43
(29) 4nWingForeAftBending-S	343,79	0,17	99,22	5,12	-88,29	3,60
(30) 2nFuselageVerticalBending	355,68	0,29	99,75	2,90	-87,93	10,43

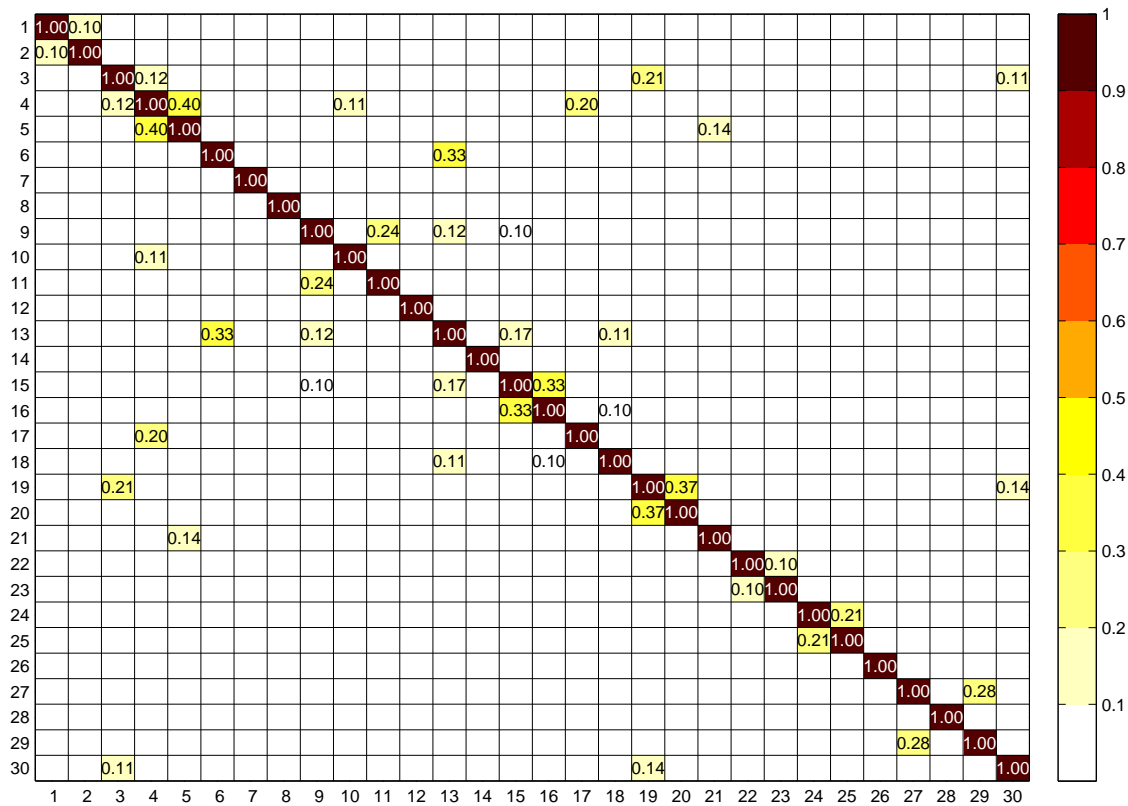
Tabelle 6.8.: Modale Eigenschaften T1C0

Eigenform-Bezeichnung	$f_0$ [Hz]	$D_{gen}$ [%]	MPC [%]	MPD [°]	Phase $a_{gen}$ [°]	$m_{gen}$ [kgm <sup>2</sup> ]
(1) 1nVTPBending-A	25,08	0,48	99,98	0,79	-75,49	3,37
(2) 1nFuselageLateralBendingRear-A	43,16	0,47	99,99	0,69	-86,95	3,08
(3) RBM Pitch	49,34	2,24	99,75	2,89	-86,18	6,72
(4) VTP Torsion-A	68,11	0,41	100,00	0,34	-70,46	0,53
(5) 1nFuselageLateralBendingFront-A	97,69	0,42	99,98	0,76	-77,22	3,70
(6) 2nVTPBending-A	108,39	1,12	100,00	0,25	-82,31	0,56
(7) 2nHTPBending-S	195,95	0,62	99,41	4,88	-96,92	4,50
(8) HTPForeAftBending-S	218,03	0,72	99,85	2,30	-97,88	0,52
(9) 2nFuselageLateralBendingRear-A	227,42	0,71	99,75	3,37	-96,08	9,95
(10) 1nFuselageVerticalBending-S	268,64	0,53	99,99	0,64	-77,85	7,38
(11) 3nFuselageLateralBending-A	321,45	0,50	99,94	1,42	-86,82	5,14

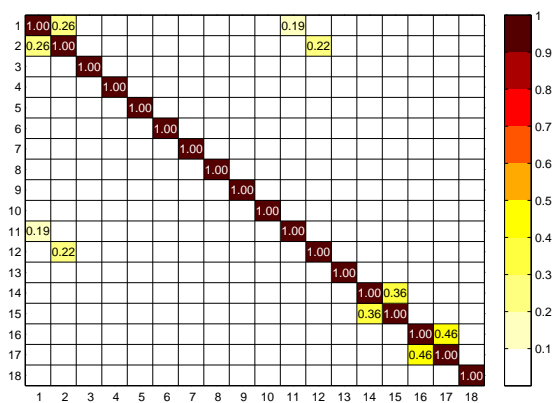
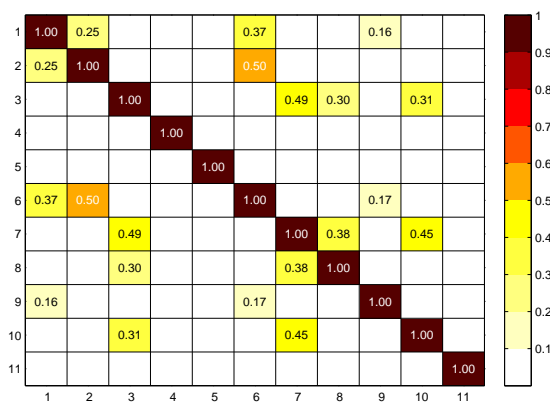
Tabelle 6.9.: Modale Eigenschaften T4C2

Eigenform-Bezeichnung	$f_0$ [Hz]	$D_{gen}$ [%]	MPC [%]	MPD [°]	Phase $a_{gen}$ [°]	$m_{gen}$ [kgm <sup>2</sup> ]
(1) 2nWingBending-S	5,15	0,26	98,33	5,49	-77,53	5,49
(2) 1nWingBending-A	5,18	0,09	99,54	5,04	-69,84	1,97
(3) WingTorsion-A	33,33	0,16	100,00	0,12	-91,76	0,67
(4) WingTorsion-S	33,40	0,23	99,99	0,63	-90,29	0,58
(5) 4nWingBending-S	43,93	0,27	99,43	4,16	-89,02	1,59
(6) 3nWingBending-A	44,14	0,17	99,83	2,45	-90,82	1,64
(7) 1nWingForeAftBending-A	46,83	0,26	99,99	0,68	-70,70	4,77
(8) 2nWingForeAftBending-S	49,30	0,19	99,98	0,88	-88,08	4,40
(9) 6nWingBending-S	132,25	0,30	99,96	1,06	-96,86	2,73
(10) 5nWingBending-A	132,85	0,20	99,73	3,26	-87,60	1,57
(11) 8nWingBending-S	263,37	0,30	99,83	2,32	-103,39	3,56
(12) 7nWingBending-A	264,41	0,18	99,71	3,12	-88,61	1,82
(13) WingletBendingRight-U	320,77	0,54	99,83	2,36	-85,54	1,40
(14) WingletBendingLeft-U	323,77	0,31	99,85	2,18	-85,56	1,57
(15) 3nWingForeAftBending-A	326,78	0,30	99,81	2,67	-98,05	5,63
(16) 4nWingForeAftBending-S	338,79	0,31	99,08	5,50	-78,10	3,25
(17) WingTorsion-A2	341,74	0,54	98,52	7,20	-114,83	1,43
(18) WingTorsion-S2	343,38	0,50	99,97	1,05	-84,07	1,12

Tabelle 6.10.: Modale Eigenschaften T5C1



(a) AutoMAC-Matrix der Eigenvektoren aus dem Test T1C0 (frei-freier gelagerte Gesamtstruktur)



(b) AutoMAC-Matrix der Eigenvektoren aus dem Test T4C2 (eingespannte Rumpf-Leitwerk-Struktur) (c) AutoMAC-Matrix der Eigenvektoren aus dem Test T5C1 (eingespannte Flügel-Struktur)

Abbildung 6.24.: AutoMAC-Matrizen: Gesamtstruktur (T1C0) und Substrukturen (T4C2 und T5C1)



Die AutoMAC-Matrix zu T1C0, dargestellt in Abb. 6.24a, zeigt, dass benachbarte, identifizierte elastische Eigenformen untereinander in hohem Maße linear unabhängig sind und keine Eigenformen doppelt identifiziert wurden. Lediglich die nah beieinander liegenden Eigenformen (15)/(16) sowie (19)/(20) weisen Ähnlichkeiten auf, die aber in gleichem Maße in den AutoMAC-Matrizen des anfänglichen FE-Modells in Abb. 6.16a und Abb. 6.16b, bei (17)/(18) und bei (20)/(21), auffallen und nicht auf die Qualität der Identifikation zurückzuführen sind. Höhere Werte zwischen (5) *RBM Heave* und (6) *2nWingBending-S* erklären sich durch die gemeinsame Hebebewegung. Ähnlichkeiten von (22) sowie (24) mit benachbarten Eigenformen sind in der schlechten Identifikation ihrer modalen Eigenschaften begründet.

Beim Test T4C2 der eingespannten Rumpf-Leitwerk-Struktur weisen alle Eigenformen in Tab. 6.9 eine sehr geringe Komplexität auf, sodass ihre modalen Eigenschaften als sehr gut identifiziert gelten können.

Auffällig ist unter Hinzunahme der AutoMAC-Matrix der numerisch berechneten Eigenvektoren aus dem FE-Modell des eingespannten Rumpfes in Abb. 6.16e und Abb. 6.16f, dass das FE-Modell nur 10 und nicht 11 Eigenformen im Frequenzbereich bis 400 Hz vorhergesagt hatte. Dies ist wahrscheinlich darin begründet, dass die Steifigkeit der Schraubverbindung im FE-Modell überschätzt wurde und eine bzw. mehrere davon stark abhängige Eigenformen eine viel tiefere Eigenfrequenz haben als vorhergesagt.

Weiterhin ist auffällig, dass aufgrund der Elastizität der Einspannung und des großen Trägheitsmoments der Substruktur eine Starrkörpereigenform (3) *RBM Pitch* auftritt, die bei einer Frequenz weit unter  $f_{max}$  auftritt. Der modale Dämpfungsgrad der Eigenform charakterisiert dann die Dämpfungswirkung der Schraubverbindung.

Die AutoMAC-Matrix zu T4C2, dargestellt in Abb. 6.24b, zeigt, dass identifizierte, benachbarte Eigenformen einen hohen Grad linearer Unabhängigkeit aufweisen. Ähnlichkeiten von (1)/(2) sind bereits vom FE-Modell in Abb. 6.16e und Abb. 6.16f vorhergesagt worden. Ähnlichkeiten von (7)/(8) sind weder vom FE-Modell vorhergesagt worden noch in der Qualität der Identifikation begründet. Es lässt sich daher zu diesem Zeitpunkt nur auf eine Differenz mit den Eigenformen des FE-Modells schließen.

Beim Test T5C1 wurden alle Eigenformen trotz hoher modaler Dichte aufgrund der Symmetrie des Flügels gefunden. Sie weisen größtenteils einen zufriedenstellenden Grad an Komplexität auf.

Die ersten beiden elastischen Eigenformen (1) *2nWingBending-S* und (2) *1nWingBending-A* weisen eine schlechte Qualität auf, da sie aufgrund der Symmetrie der Flügelstruktur einen Frequenzunterschied, der niedriger als die Frequenzauflösung der diskreten Frequenzgänge ist, aufweisen und auf diese Weise eine Identifikation erschweren. Die benachbarten Eigenformen (16)/(17) können ebenfalls aufgrund ihrer hohen modalen Dichte nur mit mittelmäßiger Qualität identifiziert werden.

Die zugehörige AutoMAC-Matrix, abgebildet in Abb. 6.24c, spiegelt die genannten Probleme bei (1)/(2) und (16)/(17) wieder, indem Gemeinsamkeiten bei den Eigenformen festgestellt

werden. Sie zeigt außerdem Gemeinsamkeiten bei den benachbarten Eigenformen (14)/(15), was trotz guter Qualität der Eigenformen auf die modale Dichte zurückgeführt wird.

Bei der Betrachtung der Eigenformen in Abb. A.11 und Abb. A.12, siehe Kap. A.10, fällt auf, dass sehr viele Biegeeigenformen auf einer Seite viel stärkere Bewegungskomponenten zeigen als auf der symmetrisch gegenüberliegenden Seite. Dies ist im in Kap. 6.3.2 angesprochenen Problem der einseitig begrenzten Strukturanregung begründet und macht eine korrekte Identifikation und Zuordnung der Eigenformen sehr schwer.

Die Ergebnisse der Tests mit dämpfungsbehandelter Gesamtstruktur T8C0 und Flügel-Substruktur T6C1 sind im Anhang in Kap. A.6 in Tab. A.5 und Tab. A.7 zu finden. Sie zeigen, dass alle Eigenformen, die jeweils bei T1C0 und T5C1 gefunden worden sind, auch bei T8C0 und T6C1 bei sehr leicht abgeminderten Eigenfrequenzen infolge der Massenbelegung wiedergefunden werden konnten.

Im Gegensatz zum unbehandelten Flügel konnten beim dämpfungsbeschichteten Flügel die ersten zwei elastischen Eigenformen mit guter Qualität identifiziert werden. Eng benachbarte Eigenformen höherer Frequenzen konnten hingegen im Vergleich nur mit minderer Qualität identifiziert werden.

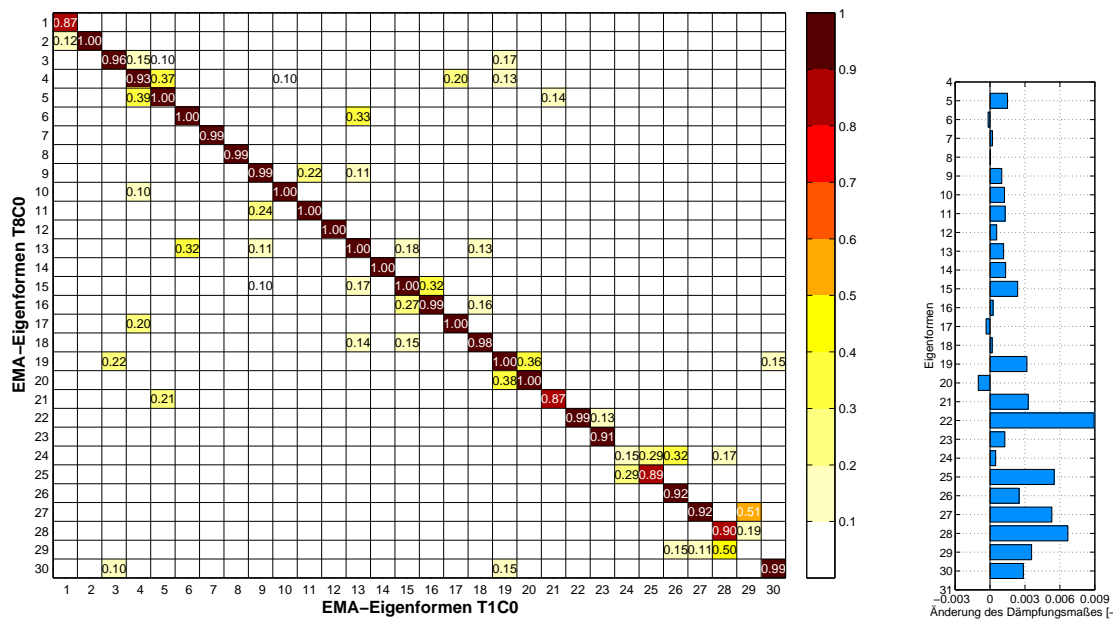
Um die Übereinstimmung der Eigenformen der unbeschichteten mit der beschichteten Gesamt- bzw. Substruktur zu errechnen, werden MAC-Matrizen mit den Eigenvektoren errechnet. Sie sind in Abb. 6.25a und Abb. 6.25c dargestellt.

Die MAC-Matrix der Gesamtstruktur in Abb. 6.25a zeigt, dass fast alle Starrkörper- und elastischen Eigenformen mit sehr hoher Ähnlichkeit wiedergefunden werden konnten und ihre Reihenfolge trotz Dämpfungsbehandlung gleich geblieben ist. Lediglich (24) *3nFuselageLateralBending-A* und (29) *4nWingForeAftBending-S*, die in mindestens einer der beiden Tests schlecht identifiziert wurden, weisen fast gar keine Ähnlichkeiten auf.

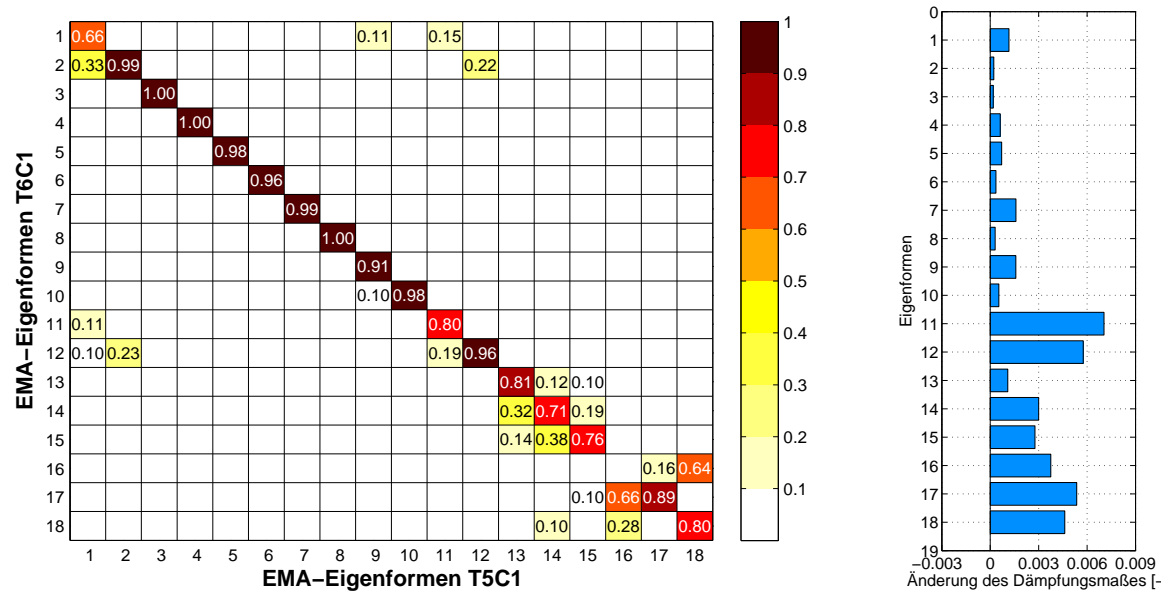
Die MAC-Matrix der Flügel-Substruktur in Abb. 6.25c zeigt, dass fast alle Eigenformen wiedergefunden werden konnten. Lediglich die Eigenform, jeweils identifiziert als (16) *4nWingForeAftBending-S*, weist gar keine Ähnlichkeit zwischen den Tests auf.

Viele wiedergefundenen Eigenformen weisen niedrige MAC-Werte auf. Dies ist auf die ungleichmäßige Anregung und der entsprechend unsicheren Identifikation der Eigenformen zurückzuführen. Dies führt in unterschiedlichem Maße dazu, dass viele symmetrische oder antisymmetrische Eigenformen von Test zu Test unterschiedliche Bewegungskomponenten aufweisen und trotz Zusammengehörigkeit eine begrenzte Ähnlichkeit aufweisen.

Neben den MAC-Matrizen zeigen die Balkendiagramme in Abb. 6.25b und Abb. 6.25d die Änderungen des modalen Dämpfungsmaßes, die sich aus der FLD ergeben haben. Sie bestätigen in beiden Fällen den bereits vermuteten Anstieg des modalen Dämpfungsmaßes bei Eigenformen ab 200 Hz. Eigenformen unter 200 Hz sind ebenfalls leicht stärker gedämpft, dies kann aber als allgemeine Unsicherheit bei der Identifikation des modalen Dämpfungsmaßes betrachtet werden.

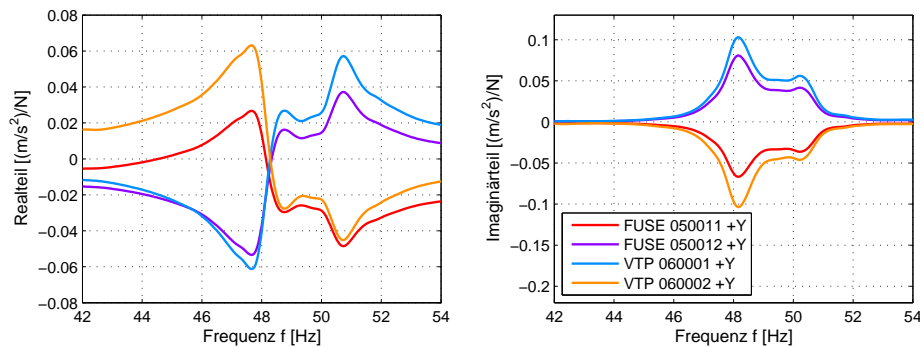


(a) MAC-Matrix der Tests T1C0 und T8C0 (unbeschichtete und dämpfungs-behandelte Gesamtstruktur) (b) Änderung des modalen Dämpfungsmaßes



(c) MAC-Matrix der Tests T5C1 und T6C1 (unbeschichtete und dämpfungs-behandelte Flügel-Substruktur) (d) Änderung des modalen Dämpfungsmaßes

**Abbildung 6.25.:** MAC-Matrizen der Tests zwischen unbeschichteter und beschichteter Gesamtstruktur bzw. Flügel-Substruktur



**Abbildung 6.26.:** Verlauf von Real- und Imaginärteil (Erregerpunkt H21) frei hängenden Rumpf-Leitwerk-Struktur

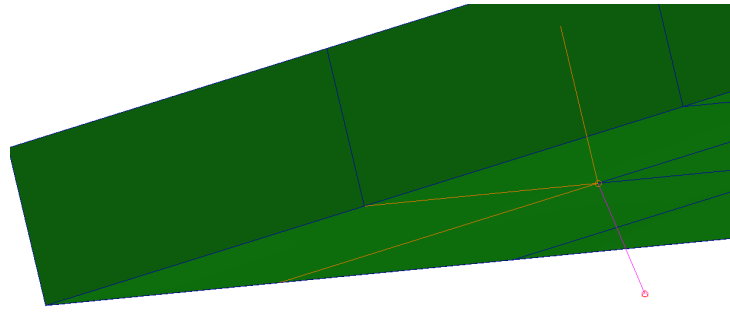
Bei der Auswertung vom Test T3C2 der frei hängenden Rumpf-Leitwerk-Struktur hat sich eine vermutliche Nichtlinearität bei der Eigenform (5)  $2nVTPBending-A$  (s. Tab. A.4 in Kap. A.6) erwiesen. Dies geht aus den Frequenzgängen hervor, die den exakt gleichen stark verzerrten Verlauf für alle Messpunkte und hier beispielhaft für vier Sensoren in Abb. 6.26 dargestellt ist. Ein leicht verzerrter Verlauf konnte auch bei T1C0 bei (16)  $2nVTPBending-A$ , aber nicht bei T4C2 oder T8C0 beobachtet werden.

## 6.4. Korrelation von experimenteller und numerischer Modalanalyse

Im folgenden Abschnitt wird ein Vergleich der Ergebnisse aus der numerischen Modalanalyse und der experimentellen Modalanalyse vorgenommen, um auf die Vorhersagekraft der FE-Modelle zu schließen und den Einsatz der FE-Modelle begründen und eingrenzen zu können. Der Vergleich bezieht sich ausschließlich auf die Gesamtstruktur, die eingespannten Substrukturen und die dämpfungsbeschichteten Strukturen.

In einem ersten Schritt werden dafür die FE-Modelle an die Testumgebungen der experimentellen Modalanalyse angepasst. Sie werden dazu im Hinblick auf Massenbelegung und Rand- und Übergangsbedingungen verändert.

Danach werden die analytisch und experimentell erzielten Ergebnisse mittels Eigenfrequenzvergleichen, MAC-Matrizen und Eigenformbetrachtungen bewertet.



**Abbildung 6.27.:** Modellierung der kinematischen Abhängigkeit der Zusatzmasse in MSC.NASTRAN (grün - Volumenelemente, orange - RBE3-Elemente, magenta - RBAR-Element)

#### 6.4.1. Manuelle Anpassung der FE-Modelle an die Testumgebung

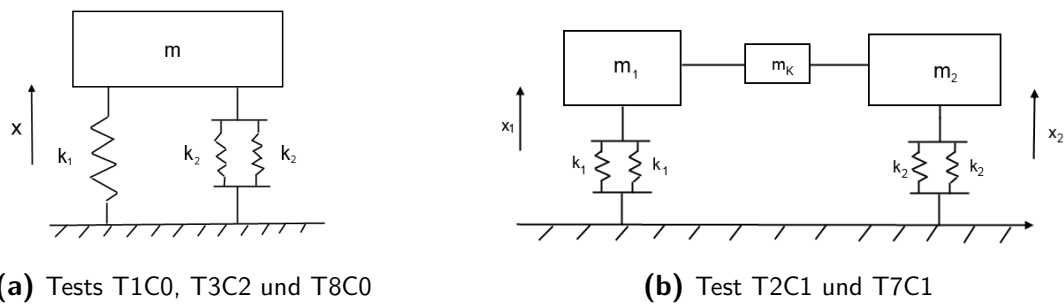
Die verwendeten **Sensoren** wiegen allein jeweils 2 g. Mit Plastiksockel wiegen sie im Verbund 4,3 g [33]. Sie werden alle in den FE-Modellen mittels konzentrierter Massenelemente berücksichtigt, da sie vor allem am Flügel auch mit ihren kleinen Massen aufgrund ihres großen Abstandes zum Schwerpunkt der Struktur und zur neutralen Faser des Flügels ein bedeutendes Massenträgheitsmoment mit Einfluss besitzen.

Die **Klemme** wiegt 660 g. Sie beeinflusst die modalen Eigenschaften durch ihre hohe Masse, trägt aber nicht zur Steifigkeit der Struktur bei, sodass eine Modellierung mittels vier verteilter konzentrierter Massenelementen am Rumpf ausreicht.

Die befestigte **Zusatzmasse** an den vorderen Winglet-Spitzen wird ebenfalls als konzentriertes Massenelement berücksichtigt. Aufgrund ihrer hohen Masse und ihres Abstandes zu Schwerpunkt der Gesamtstruktur und neutraler Faser des Flügels ist ihre Position im FE-Modell sehr wichtig für Torsionseigenformen des Flügels. Die Position und Bewegung des Massenelementes bei Verformungen werden in MSC.NASTRAN durch *Multi-Point Constraints* (dt.: kinematische Abhängigkeiten, Abk. MPC) ermöglicht.

Dafür wird ein neuer freier Knoten im Raum definiert, an den das konzentrierte Massenelement angebracht wird. Dieser Knoten wird mittels eines RBAR-Elementes, das als unendlich steifes Stabelement betrachtet werden kann, mit einem Knoten der Volumenelemente-Struktur verbunden. Alle Freiheitsgrade am ehemals freien Knoten werden von den Freiheitsgraden am anderen Ende des RBAR-Elementes, also von der Strukturbewegung, abhängig gemacht. Da Volumenelemente nur drei Freiheitsgrade haben, der Knoten aber eine Verschiebung bei einer Torsion des Flügels kinematisch korrekt mitmachen soll, werden drei RBE3-Elemente verwendet. Diese RBE3-Elemente verbinden drei benachbarte, nicht kollineare Knoten der Volumenelemente-Struktur mit dem unabhängigen Ende des RBAR-Elementes und machen die Rotationsfreiheitsgrade des RBAR-Elementes abhängig von ihren Translationsfreiheitsgraden [28]. In [Abb. 6.27](#) ist die Modellierung in PATRAN dargestellt.

Die **Bungees**, die als Ersatzlagerung für die frei-freie Lagerung von Gesamtstruktur (T1C0),



**Abbildung 6.28.:** Systemmodellierung zur Bestimmung der Bungee-Federraten

Rumpf-Leitwerk-Struktur (T3C2) und Flügel-Struktur (T2C1 und T7C1) dienen, werden wie beim anfänglich zur Verfügung gestellten FE-Modell mit masselosen Fachwerksstabelemente modelliert. Ihre Längen, ihre Aufhängungspunkte und ihre Koordinaten im Raum wurden während der Versuche bestimmt.

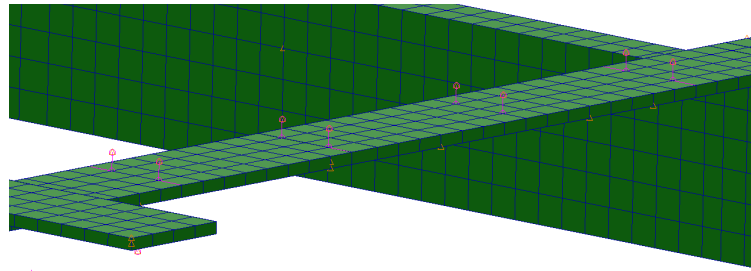
Die Steifigkeit der Bungees wird bei T1C0 und T3C2 abgeschätzt, indem die Struktur als Ein-Freiheitsgrad-Feder-Masse-System wie in Abb. 6.28a betrachtet wird und die einzige identifizierte RBM (4) *RBM Heave*, die die Bungees stark belastet, aus den jeweiligen Tests zu Hilfe genommen wird. Die Eigenfrequenz der RBM und die Masse der Gesamtstruktur ermöglichen die Berechnung der Federkonstanten der einzelnen Bungees. Die Federkonstanten erlauben mit Wissen von Länge und Querschnitt eine Bestimmung des Elastizitätsmoduls, der für die Stabelemente verwendet wird.

Bei T2C1 und T7C1 sind zwei RBM (3) *RBM Heave* und (4) *RBM Pitch*, die die Bungees belasten, identifiziert worden. Sie müssen beide berücksichtigt werden, um die Steifigkeit der Bungees abzuschätzen. Daher wird die Struktur wie in Abb. 6.28b als zwei Ein-Freiheitsgrad-Feder-Masse-Systeme, verbunden über eine Koppelmasse, modelliert. Mit Wissen der Strukturmasse, des ungefähren Dreh- und Schwerpunktes, der Trägheitsmomente sowie den Eigenfrequenzen der beiden RBM wird die Koppelmasse sowie die Federkonstanten der Federn berechnet.

Die **Elastizität der Schraubverbindung** zwischen oberem und unterem Flügelkasten bzw. zwischen Flügelkasten und Fundament wird in MSC.NASTRAN mit skalaren Federelementen, die jeweils längs oder senkrecht zur Auflagefläche wirken, modelliert. Sie wird für alle Tests als äquivalent betrachtet und die Werte der Federkonstante sind dementsprechend bei allen FE-Modellen gleich.

Das Elastizitätsmodul der in der Ebene wirkenden Federn kann nicht auf einfache Weise berechnet werden, hat aber auch wenig Einfluss auf die modalen Eigenschaften. Es wird daher von einer anderen Schraubverbindung der Struktur übernommen.

Das Elastizitätsmodul der senkrecht zur Auflagefläche wirkenden Federn kann ebenfalls nicht



**Abbildung 6.29.:** Modellierung der Dämpfungsschichtung mit konzentrierten Massenelementen (grün - Volumenelemente, magenta - RBAR-Elemente, orange - Massenelemente)

auf einfache Weise berechnet werden und wird am Fall der eingespannten Rumpf-Leitwerk-Struktur beim Test T4C2 mithilfe der identifizierten RBM (3) *RBM Pitch* (siehe [Abb. A.10c](#)) abgeschätzt. Das Elastizitätsmodul hat dort einen sehr starken Einfluss auf die modalen Eigenschaften der Eigenformen, vorrangig aber auf RBM (3). Es wird somit iterativ so lange verändert, bis eine genügende Konvergenz zur identifizierten Eigenfrequenz des RBM erreicht wird.

Die **Dämpfungsschichtung** wird mit konzentrierten Massenelementen modelliert, da sie eine sehr viel geringere Steifigkeit als der Rest der Struktur aufweist und lediglich eine Massenbelegung verursacht. Sie wiegt auf dem linken Flügel 155 und auf dem rechten Flügel 145 g. Sie wird je Flügel in 8 gleich große, dreidimensionale, rechteckige Segmente aufgeteilt, deren Gewicht im Schwerpunkt konzentriert ist. Der Schwerpunkt jedes Segmentes wird dann wie bei der Zusatzmasse mit der Flügelstruktur mittels RBAR- und RBE3-Elementen verbunden. Die Modellierung in Patran ist für den rechten Flügel in [Abb. 6.29](#) dargestellt.

## 6.4.2. Korrelation

In diesem Abschnitt werden die experimentell bestimmten zu den numerisch errechneten Eigenformen (siehe [Kap. A.11](#) und [Kap. A.12](#)) zugeordnet, um die Vorhersagekraft des FE-Modells für modale Eigenschaften der Laborstruktur und ihren Substrukturen zu bestimmen. Sie werden dabei mithilfe zweier Hilfsmittel zugeordnet: das MAC-Kriterium und *Spike/Polar Plots*.

MAC-Matrizen verwenden die experimentell bestimmten und die numerisch berechneten Eigenvektoren, deren Elemente auf die Komponenten an den Sensorpositionen begrenzt sind, und bilden zwischen der j-ten experimentellen und der k-ten numerischen Eigenform einen  $MAC_{jk}$ -Wert.

Die MAC-Werte sind ein Maß, wie ähnlich die Sätze an Eigenvektoren zueinander sind, sind aber kein endgültiger Hinweis, dass die betrachteten Eigenformen tatsächlich zusammengehören und die gleiche Eigenform darstellen. Sie vereinfachen lediglich den Zuordnungsprozess, siehe [Kap. 3.3.2](#).

*Spike Plots* (dt.: Nadel-Graphen) sind grafische Darstellungen, die die Eigenvektorkomponen-

ten der betrachteten Eigenvektoren an den Messpunkten auf einer normierten Skala von -1 bis 1 und geordnet nach Raumrichtung  $x$ ,  $y$  und  $z$  nebeneinander darstellen.

Eine Zusammengehörigkeit zweier Eigenformen ist nicht von den Komponentenamplituden abhängig, sondern in noch wichtigerem Maße von deren Phasengleichheit. Sie ist daher im Zweifelsfall, also bei niedrigen oder mehrfach gleich großen MAC-Werten, dann gegeben, wenn die Bewegungskomponenten alle in die gleiche Richtung zeigen, auch wenn die Amplituden nicht ganz stimmen. Dies trifft besonders bei Eigenformen zu, die dominant in einer Bewegungsrichtung ausschlagen oder eine bestimmte Symmetrie und Antisymmetrie aufweisen.

*Polar Plots* (dt.: Darstellung in Polarkoordinaten) stellen die experimentell identifizierten komplexen Eigenvektoren in der GAUSS'schen Ebene dar. Sie geben Hinweise auf die Komplexität der Eigenvektoren und auf den Grad des Fehlers, der bei der Realisierung der Eigenvektorkomponenten durch Gl. (3.45) und dadurch bei der MAC-Berechnung und *Spike-Plot*-Darstellung gemacht wird.

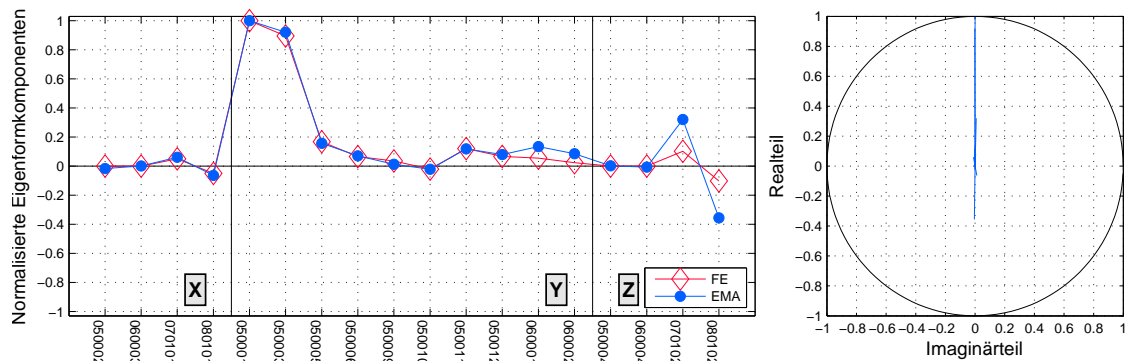
Als Beispiel für die Schwierigkeiten, die bei der Zuordnung beachtet werden müssen, sind in Abb. 6.30 drei Spike Plots dargestellt.

Der oberste Spike Plot in Abb. 6.30a stellt die Eigenform aus der EMA von Test T4C2 zusammen mit einer Eigenform des FE-Modells des eingespannten Rumpfes dar. Der MAC-Wert bescheinigt mit 0,94 eine sehr starke Ähnlichkeit, und der Spike Plot zeigt auch, dass beide Eigenformen zusammen gehören. Der mittlere Spike Plot in Abb. 6.30b stellt Eigenformen gegenüber, die zwar mit einem MAC-Wert von 0,81 eine sehr hohe Ähnlichkeit miteinander haben, aber aufgrund der um  $180^\circ$  phasenverschobenen Komponente in X-Richtung nicht die gleiche Eigenform darstellen. Der unterste Spike Plot in Abb. 6.30c stellt Eigenformen gegenüber, die visuell und gemäß einem MAC-Wert von 0,59 eine geringe Ähnlichkeit aufgrund starker Amplitudenunterschiede aufweisen. Die Eigenformen gehören dennoch zusammen, weil jede Komponente phasengleich ist und die dominanten Bewegungsrichtungen zumindest ansatzweise richtig dargestellt werden. Sie weisen aber auf eine schlechte experimentelle Identifikation der modalen Eigenschaften oder ein nicht genügend vorhersagekräftiges FE-Modell oder beides hin.

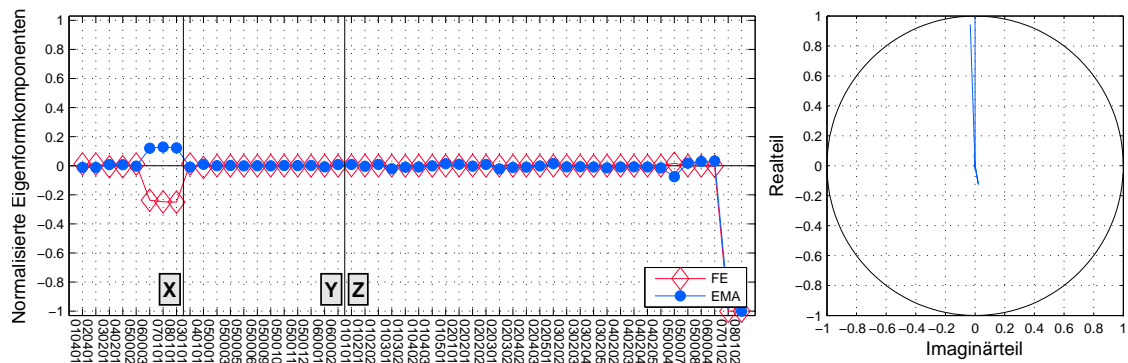
Vor allem benachbarte reine Flügeigenformen müssen genau auf ihre Zusammengehörigkeit geprüft werden, da im Experiment wegen ungleichmäßiger Anregung oder realen Asymmetrien teils nur eine Flügelhälfte deutliche Bewegungskomponenten aufweist, während gemäß FE-Modell eine symmetrische oder antisymmetrische Eigenform mit gleich großen Amplituden auf beiden Flügelhälften vorhergesagt wird. Solche Fälle sind in den MAC-Matrizen durch benachbarte MAC-Einträge, die in der Summe knapp 1 ergeben, erkennbar.

Im Folgenden werden nur die Ergebnisse der wichtigsten Tests der frei-frei hängenden Gesamtstruktur T1C0, der eingespannten Flügel-Substruktur T5C1 und der eingespannten Rumpf-Leitwerk-Substruktur dargestellt und erläutert. Ergebnisse der Tests der dämpfungsbeschichteten Flügel-Substruktur T6C1 und der dämpfungsbehandelten Gesamtstruktur T8C0 sind im Anhang in Kap. A.13 dargestellt.

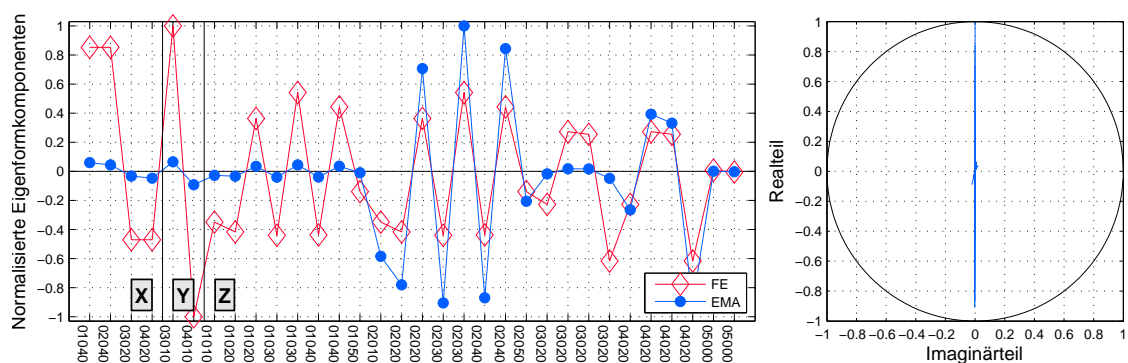




(a) Spike Plot, T4C2: EMA (5) 1nFuselageLateralBendingFront-A – FE 5, MAC: 0,94 (Ähnlichkeit: groß, Zusammengehörigkeit: ja)

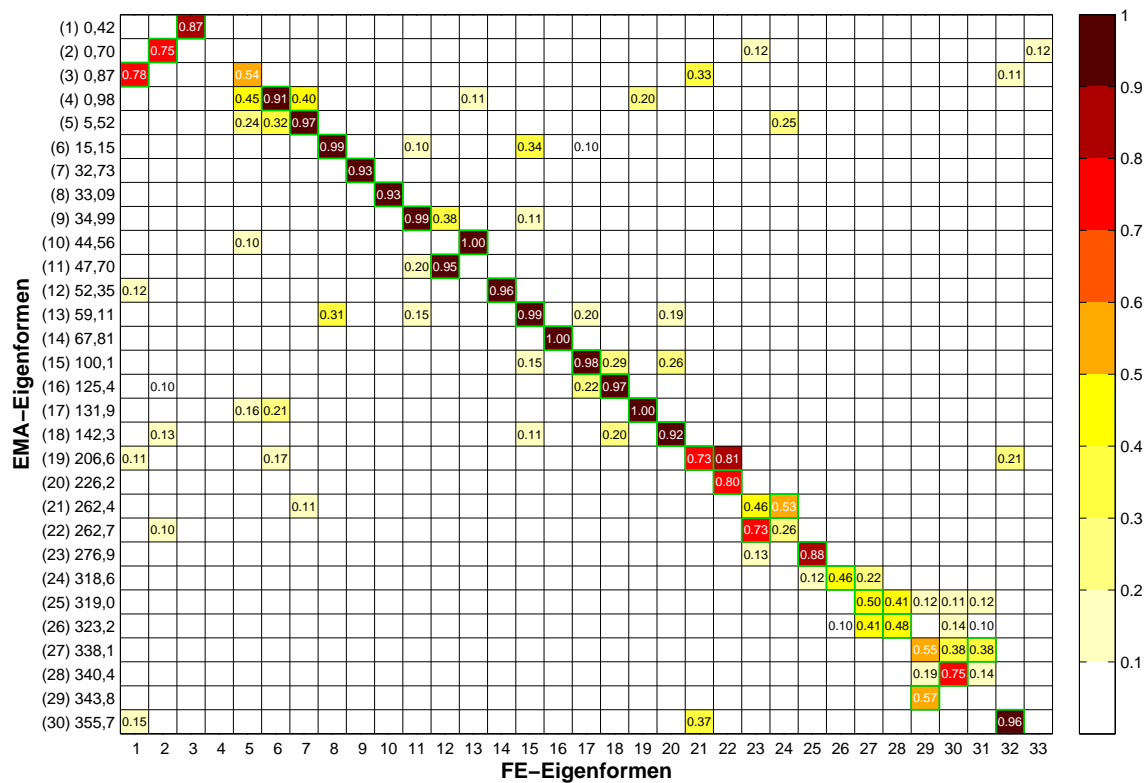


(b) Spike Plot, T1C0: EMA (19) 2nHTPBending-S – FE 22, MAC: 0,81 (Ähnlichkeit: groß, Zusammengehörigkeit: nein)

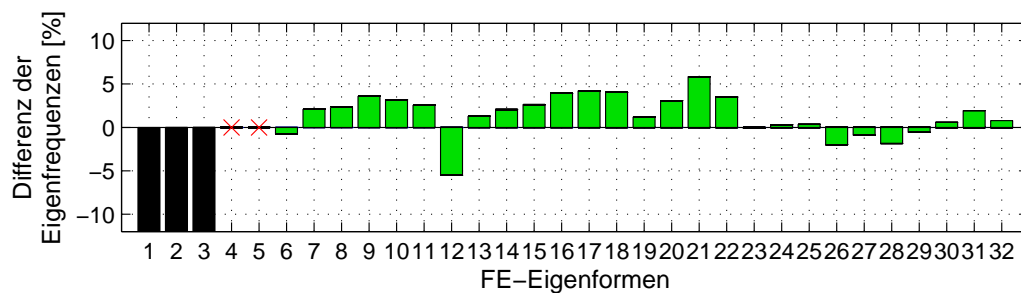


(c) Spike Plot, T5C1: EMA (18) WingTorsion-S2 – FE 16, MAC: 0,59 (Ähnlichkeit: klein, Zusammengehörigkeit: ja)

**Abbildung 6.30.:** Beispiele für die Verwendung von *Spike* und *Polar Plots*

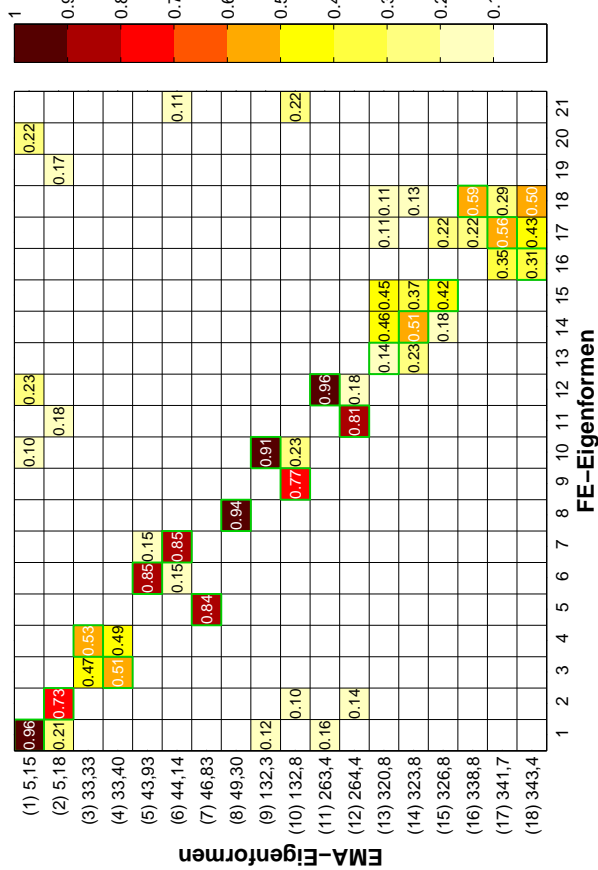


(a) MAC-Matrix zwischen experimentell und numerisch bestimmten Eigenformen

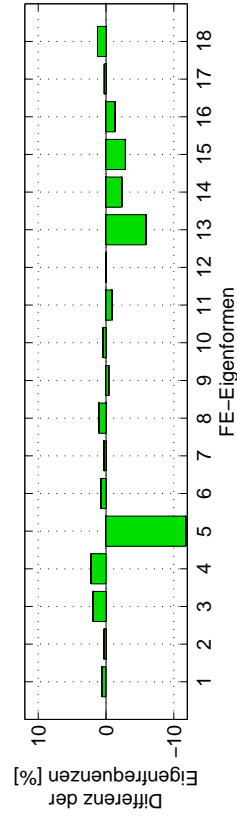


(b) Frequenzabweichung der numerisch gegenüber den experimentell bestimmten Eigenfrequenzen

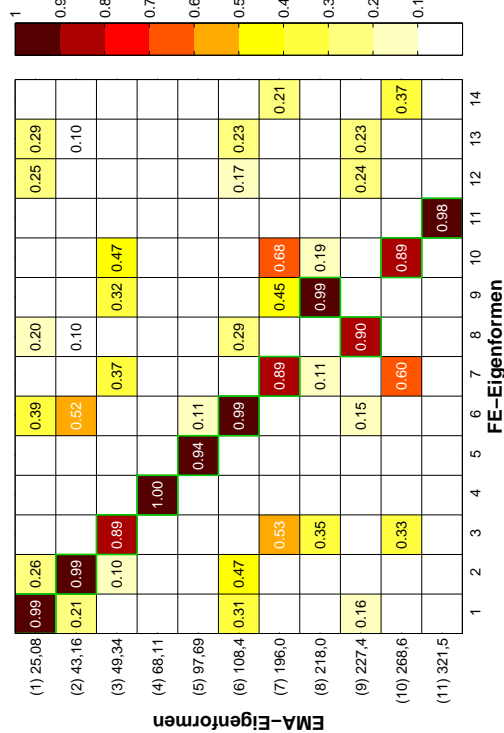
**Abbildung 6.31.:** MAC-Matrix, ausgewählte Eigenformpaare und Frequenzabweichung bei frei-frei aufgehängter Gesamtstruktur T1C0



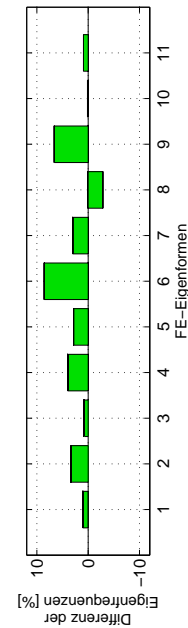
(b) MAC-Matrix bei T5C1



(d) Frequenzabweichung der numerisch gegenüber den experimentell bestimmten Eigenfrequenzen bei T5C1



(a) MAC-Matrix bei T4C2



(c) Frequenzabweichung der numerisch gegenüber den experimentell bestimmten Eigenfrequenzen bei T4C2

**Abbildung 6.32.:** MAC-Matrix zwischen experimentell und numerisch bestimmten Eigenformen, ausgewählte Eigenformpaare und Frequenzabweichung

Für T1C0 zeigt Abb. 6.31a die MAC-Matrix zwischen experimentell und numerisch aus dem Rechenmodell bestimmten Eigenformen. Sie zeigt ebenfalls die Zuordnungen, die sich gegebenenfalls erst durch die Betrachtung von *Spike* und *Polar Plots* ergeben haben, durch grüne Umrandungen. Die prozentuale Abweichung der numerisch vorhergesagten zur experimentell identifizierten Eigenfrequenz ist für jedes Paar gleich darunter in Abb. 6.31b dargestellt.

Die vier identifizierten Starrkörpereigenformen können sehr gut mit der modellierten Aufhängung im FE-Modell vorhergesagt werden. Ihre Frequenzabweichung liegt bei -100 %, markiert durch die schwarzen Balken, da sie die Bungees sehr schwach belasten und daher im FE-Modell nur wenig über 0 Hz Eigenfrequenz besitzen. Zwei Starrkörpereigenformen wurden nicht experimentell identifiziert und sind mit einem roten Kreuz versehen. Die Eigenfrequenz von (6) *RBM Heave* kann durch die in Kap. 6.4.1 abgeschätzten Steifigkeiten der Bungees von der Frequenz sehr gut getroffen werden.

Die modalen Eigenschaften der elastischen Eigenformen bis 200 Hz werden sehr gut vom FE-Modell berechnet. Lediglich das antisymmetrische Schwenken der Flügel bei (11) *1nWingForeAftBending-A* wird viel zu weich vorhergesagt.

Die Eigenformen des T-Leitwerks werden zu steif und mit ungenauen Schwenk-Amplituden vorhergesagt.

Ab 250 Hz leiden alle Paare symmetrischer und antisymmetrischer Eigenformen, deren dominante Komponente der Flügel ist, unter der realen Asymmetrie der Flügelstruktur, sodass die Ähnlichkeit, charakterisiert durch die MAC-Werte, deutlich sinkt. Ihre Identifikationsqualität vom Experiment sinkt teils ebenfalls in diesem Bereich. Ihre Eigenfrequenzen werden trotzdem sehr gut vom FE-Rechenmodell vorhergesagt. Hinzu kommt ab 300 Hz, dass X- und Y-Bewegungskomponenten bei den reinen Flügeleigenformen mit sehr stark abweichenden Amplituden vorhergesagt werden, was die Ähnlichkeiten noch ein Stück verringert.

Bei T8C0 in Abb. A.19 ergibt sich außer zwei Besonderheiten das gleiche Bild. Zum einen werden trotz der berücksichtigten Massenbelegung im FE-Modell alle Eigenformen durchschnittlich etwas steifer vorhergesagt als tatsächlich identifiziert. Zum anderen hat die Massenbelegung zu einer derart starken Veränderung aller Bewegungskomponenten der Eigenform 26 des FE-Modells geführt, dass keine Übereinstimmung mehr erkennbar ist.

Bei T4C2 in Abb. 6.32a und Abb. 6.32c ergibt sich eine ausnahmslos sehr gute Vorhersage der Eigenformen durch das FE-Modell. Lediglich die Eigenfrequenzen von (6) *2nVTPBending-A*, die vermutlich unter der erwähnten Nichtlinearität leidet, sowie (9) *2nFuselageLateralBendingRear-A* werden viel zu steif vorhergesagt.

Bei T5C1 in Abb. 6.32b und Abb. 6.32d treten die Probleme einseitig auftretender symmetrischer und antisymmetrischer, experimentell identifizierter Eigenformen bedingt durch die ungleichmäßige Anregung im Test bereits ab der ersten Eigenform auf, bspw. bei Abb. A.11b und Abb. A.11c. Sie treten außerdem deutlich verstärkter auf, da allein die Flügelstruktur betrachtet wird. Bis auf die viel zu weiche Vorhersage der Eigenfrequenz von (7) *1nWingForeAftBending-A* wie bei T1C0 werden die Eigenformen und Eigenfrequenzen mit hoher Qualität bis 300 Hz

vorhergesagt. Darüber hinaus summieren sich die Probleme wie bei T1C0, also ungenaue Vorhersagen dominanter Bewegungskomponenten des FE-Modells sowie mäßige Qualität der identifizierten modalen Eigenschaften, was sich in sehr schwachen Ähnlichkeiten niederschlägt.

Bei T6C1 in Abb. A.18 ergibt sich ein ähnliches Bild, mit einer Besonderheit. Durch die Massenbelegung im FE-Modell verändern sich Bewegungskomponenten von der Eigenform 13 derart stark, sodass sie nicht mehr wie vorher der experimentell bestimmten Eigenform (13) zugeordnet werden kann.

### 6.4.3. Bewertung

Mit den vorliegenden Ergebnissen muss eine Entscheidung getroffen werden, welche identifizierten modalen Eigenschaften, insbesondere modale Dämpfungsmaße, für weitere Rechnungen weiterverwendet werden dürfen und inwieweit die FE-Modelle zur Vorhersage des Schwingungsverhaltens geeignet sind.

Der Grad der Komplexität der Eigenvektoren entspricht in vielen Fällen ungefähr der Qualität der ausgewählten Pole im pLSCF-Verfahren, sodass die modalen Eigenschaften sehr gut identifizierter Eigenformen ohne Bedenken weiter verwendet werden. Dieser Zusammenhang ist aber nicht zwingend und bedeutet nicht, dass mäßige Qualitätsindikatoren für die Eigenvektoren automatisch mit unsicheren modalen Eigenschaften gleich zu setzen sind. Es konnte oft beobachtet werden, dass in einem Test für eine mehrfach identifizierte Eigenform trotz durchgehend mäßiger Qualitätsindikatoren Eigenfrequenz und modaler Dämpfungsgrad fast keinen Änderungen unterliegen.

Folglich werden nur solche elastischen Eigenformen nicht weiter verwendet, die mit mäßigen Qualitätsindikatoren (rot eingrahmte Werte in den Ergebnistabellen) identifiziert wurden und gleichzeitig unter hohen Abweichungen bei mehrmaliger Identifikation leiden. Dies betrifft:

- T1C0: (22) *WingBendingLeft-U*, (24) *3nFuselageLateralBending-A*
- T5C1: (17) *WingTorsion-A2*
- T6C1: (14) *WingletBendingRight-U*, (16) *4nWingForeAftBending-S*, (17) *WingTorsion-A2*, (18) *WingTorsion-S2*
- T8C0: (22) *WingBendingLeft-U*, (27) *WingTorsion-S2*, (28) *WingTorsion-A2*, (30) *2nFuselageVerticalBending*

Die FE-Modelle können alle elastischen Eigenformen bis auf zwei Ausnahmen, deren modale Eigenschaften ebenfalls nicht weiter verwendet werden, mit einer mindestens ausreichenden Ähnlichkeit vorhersagen. Diese Ausnahmen sind:

- T6C1: (13) *WingletBendingLeft-U*

- T8C0: (24) *3nFuselageLateralBending-A*

Die von den physikalischen FE-Modellen vorhergesagten Eigenfrequenzen der Eigenformen stimmen mit den Messergebnissen größtenteils sehr gut überein. Sie scheinen lediglich beim Schwenken der Flügel sowie dem Schwenken des Seitenleitwerks systematische Modellierungsfehler, die in zu niedrigen bzw. zu hohen errechneten Eigenfrequenzen münden, aufzuweisen. Sie werden aber als so gut erachtet, dass sie ohne eine computergestützte Modellanpassung für die kommenden Analysen verwendet werden können.

## 6.5. Dämpfungsmodellierung

Der folgende Abschnitt erläutert die Kopplung der fest definierten Substrukturen. Außerdem erläutert er die Abschätzung der proportionalen Verlustfaktoren  $g$ , die auf Grundlage der experimentell ermittelten Dämpfungsmaßen  $D_{gen}$  der Substrukturen entstehen, zur Berechnung globaler modaler Dämpfungsmaße der Gesamtstruktur verwendet werden und der computergestützten Modellanpassung dienen.

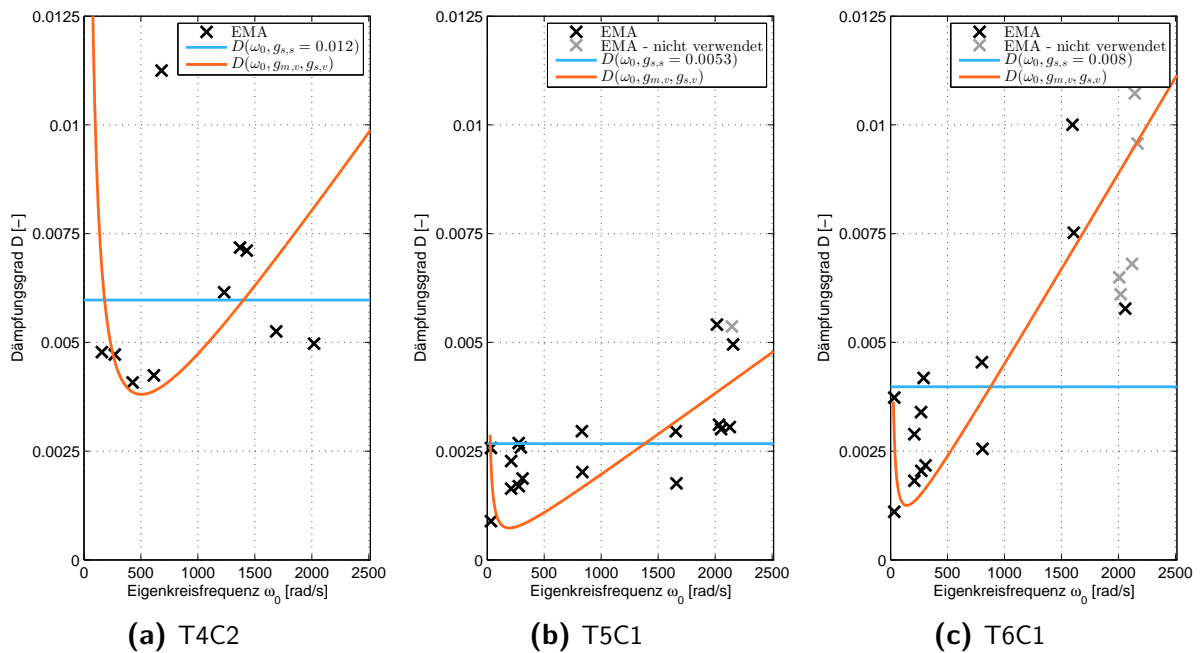
### 6.5.1. Berechnung der Dämpfungsmatrizen und Substrukturkopplung

Wie bei der Platte wird ab diesem Punkt nicht mehr MSC.NASTRAN zur Bearbeitung des FE-Modells verwendet. Stattdessen werden die Systemmatrizen der ungedämpften Substrukturen exportiert und in MATLAB importiert.

Um die Substrukturen mit Proportionaldämpfung zu versehen, wird jeweils eine proportionale physikalische Dämpfungsmatrix berechnet. Dafür stehen neben der RAYLEIGH-Dämpfung und der steifigkeitsproportionalen strukturellen Dämpfung auch die modalen Dämpfungsmodelle gemäß Kap. 2.3 zur Verfügung, um die Vorhersagekraft der Dämpfungsmodelle ohne computergestützter Modellanpassung überprüft werden soll.

Im Gegensatz zur Platte stehen reale experimentelle Daten aus Kap. 6.3 zur Verfügung, die zur Abschätzung von Verlustfaktoren einer Substruktur dienen. Die Abschätzung vernachlässigt modale Dämpfungsgrade, die gemäß Kap. 6.4.3 entweder nicht als verlässlich identifiziert gelten, deren zugehörige Eigenformen durch das FE-Modell nicht abgebildet werden können oder im Falle der Eigenform (3) *RBM Pitch* bei der Rumpf-Leitwerk-Struktur nicht das Dämpfungsverhalten der Struktur wiedergibt. Die Abschätzung errechnet die viskosen Verlustfaktoren  $g_{m,v}$  und  $g_{s,v}$  für die RAYLEIGH-Dämpfung und strukturelle Verlustfaktoren  $g_{s,s}$  für die steifigkeitsproportionale strukturelle Dämpfung mittels der Methode kleinster Quadrate.

Die Ergebnisse sind in Abb. 6.33 dargestellt. Sie zeigen, dass für die unbehandelten Substrukturen die Modellierung struktureller Dämpfung visuell besser passt als die viskose Dämpfung. Lediglich für den dämpfungsbehandelten Flügel passt der Zusammenhang der RAYLEIGH-Dämpfung aufgrund der erhöhten Dämpfung der höherfrequenten Eigenformen besser zu den



**Abbildung 6.33.:** Abschätzung der Verlustfaktoren  $g$  für die eingespannte Rumpf-Leitwerk-Struktur (T4C2), den eingespannten Flügel (T5C1) und den eingespannten dämpfungsbehandelten Flügel (T6C1)

experimentell bestimmten Dämpfungsgraden.

Bevor die Dämpfungsmatrizen auf Basis der Verlustfaktoren  $g$  oder der modalen Dämpfungsmaße  $D$  der Substrukturen berechnet werden, ist es notwendig zu wissen, wie die Kopplung der Substrukturen bei der Laborstruktur AIRMOD durchgeführt wird.

Die Kopplung ist in [Abb. 6.34](#) für alle Systemmatrizen und Dämpfungsmodelle dargestellt. Sie läuft anders ab als bei der Plattenstruktur in [Kap. 5](#), da die Substrukturen der Laborstruktur AIRMOD im Gegensatz zur Platte über skalare masselose Federelemente verbunden sind und daher keine Freiheitsgrade verschmelzen. Außerdem müssen die Steifigkeiten der ideal masselosen Bungees berücksichtigt werden, um die gekoppelten Strukturen wie in der Testumgebung zu lagern.

Die Massenmatrizen der Substrukturen werden wie in [Abb. 6.34a](#) zusammengefügt, ohne dass eine Überlagerung von Freiheitsgraden stattfindet, da nur die Substrukturen Masse zugeteilt bekommen haben.

Die Kopplung der Steifigkeitsmatrizen der Substrukturen verläuft in mehreren Schritten, verbildlicht in [Abb. 6.34b](#). Die Steifigkeitsmatrizen der Substrukturen werden zuerst wie bei der Kopplung der Massenmatrizen in die Gesamtsteifigkeitsmatrix ohne Veränderung oder Überlappung eingefügt. Auf diese Weise sind die Substrukturen geometrisch zusammengefügt und die Knoten an der Verbindungsstelle der Flügelkästen geometrisch koinzident. Aber sie sind wie in den dazugehörigen FE-Modellen mittels skalarer Federelemente mit der Umgebung fest

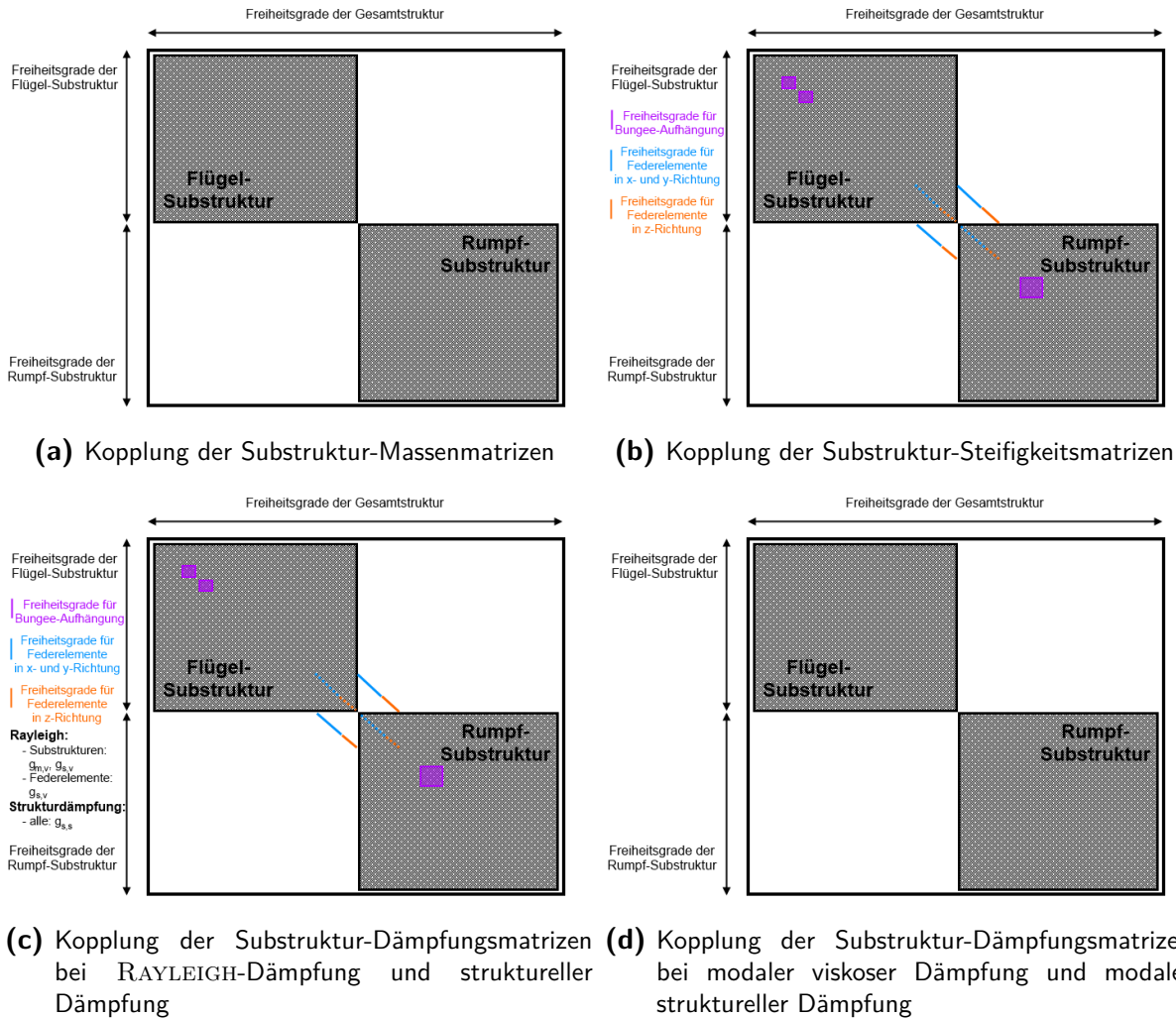


Abbildung 6.34.: Kopplung der Systemmatrizen

verbunden und sind immer noch entkoppelt.

Die skalaren Federelemente bewirken an den Knotenfreiheitsgraden der Substrukturen eine Summation von Struktursteifigkeit und Federkonstanten der Federelemente. Sie besitzen unterschiedliche Federkonstanten in Ebenenrichtung ( $x$ - und  $y$ -Richtung) gegenüber der Normalenrichtung ( $z$ -Richtung), skizziert in Abb. 6.34b durch blaue und orangene Punkte. Sie besitzen aber in beiden Substruktur-FE-Modellen die gleichen Werte. Für eine Kopplung ist es also ausreichend, ihre negativen Federkonstanten an den koinzidenten Koppelstellen der Gesamtstruktur-Freiheitsgraden einzutragen.

Die Berücksichtigung der Bungee-Seile bewirkt keine Ergänzung zusätzlicher Freiheitsgrade, da sie jeweils aus einem Element bestehen und am Aufhängungspunkt fest eingespannt sind. Sie bewirkt lediglich Steifigkeitseinträge an den Freiheitsgraden der jeweiligen Befestigungspunkte an der Struktur. Diese Steifigkeitseinträge lassen sich durch einen Vergleich der gekoppelten Substruktur-Steifigkeitsmatrizen mit der Gesamtstruktur-Steifigkeitsmatrix des FE-Modells von T1C0 ermitteln und bei jeder Kopplung der Substruktur-Steifigkeitsmatrizen auf einfache



Weise hinzufügen. Abstrahiert sind diese Einträge violett in [Abb. 6.34b](#) dargestellt.

Die Möglichkeiten zur Zuweisung von Verlustfaktoren  $g$  bei den Konzepten der RAYLEIGH-Dämpfung und der steifigkeitsproportionalen strukturellen Dämpfung sind in [Abb. 6.34c](#) abstrahiert dargestellt. Die Konzepte erlauben es, den Substrukturen, den Federelementen und den Bungee-Seilen eigene proportionale Verlustfaktoren  $g$  zuzuweisen.

Den Substrukturen ohne Lagerungselemente können eigene Verlustfaktoren  $g$  zugewiesen werden, wenn die Federkonstanten der skalaren Federelemente von den entsprechenden Einträgen der Substruktur-Steifigkeitsmatrizen vor Berechnung der Dämpfungsmatrizen  $[D]$  bzw.  $[C]$  subtrahiert werden. Hier sind je Substruktur bei RAYLEIGH-Dämpfung zwei Verlustfaktoren,  $g_{m,v}$  und  $g_{s,v}$ , und bei struktureller Dämpfung ein Verlustfaktor,  $g_{s,s}$ , möglich, welche aus den modalen Eigenschaften abgeschätzt werden.

Den skalaren Federelementen können auch steifigkeitsproportionale viskose bzw. strukturelle Verlustfaktoren  $g_{s,v}$  bzw.  $g_{s,s}$ , jeweils in Ebenen- oder Normalenrichtung, zugewiesen werden, die aber im Voraus nur äußerst grob abgeschätzt werden können.

Den Steifigkeitseinträgen der Bungee-Seile können ebenfalls steifigkeitsproportionale viskose bzw. strukturelle Verlustfaktoren  $g_{s,v}$  bzw.  $g_{s,s}$ , die aus den modalen Dämpfungsmaßen der Starrkörpereigenformen abgeschätzt werden können, zugewiesen werden.

Die physikalischen Dämpfungsmatrizen  $[D]$  bzw.  $[C]$  der Gesamtstruktur ergeben sich bei der RAYLEIGH-Dämpfung und der steifigkeitsproportionalen strukturellen Dämpfung, wenn man die Komponenten Substrukturen, Federelemente und Bungee-Seile wie bei der Gesamtstruktur-Steifigkeitsmatrix zusammenbaut.

Die physikalischen Dämpfungsmatrizen  $[D]$  bzw.  $[C]$  für die modalen Formulierungen werden mit den Vorschriften in [Gl. \(2.51\)](#) bzw. [Gl. \(2.53\)](#) berechnet. Diese Vorschriften basieren auf den physikalischen Massenmatrizen  $[M]$ , den modalen Dämpfungsgraden  $D_{gen}$ , den Eigenkreisfrequenzen  $\omega_0$ , den modalen Massen  $m_{gen}$  und den reellen Eigenformen  $\{\phi\}$  der Substrukturen. Dies hat zur Folge, dass

- vor einer Berechnung der Substruktur-Dämpfungsmatrizen eine numerische reelle Eigenwertanalyse der Substrukturen durchgeführt werden muss, um Eigenkreisfrequenzen, modale Massen und Eigenformen der Substrukturen zu errechnen,
- die Substrukturen so, wie sie im Modaltest und im zugehörigen FE-Rechenmodell gelagert sind, für eine Berechnung der physikalischen Dämpfungsmatrix der Substruktur betrachtet werden müssen, da andere Randbedingungen andere Eigenkreisfrequenzen  $\omega_0$  und insbesondere andere Eigenformen  $\{\phi\}$  zur Folge haben, wodurch die experimentell identifizierten modalen Dämpfungsmaße  $D_{gen}$  ihre Zuordnung zu den Eigenformen verlieren, und
- die Federelemente nicht von den Substrukturen getrennt und den Federelementen keine separate Dämpfungsmatrixeinträge auf Basis anderer Dämpfungsmodellierungen gewährt

Dämpfungsmodell	Abschnitt			
	Flügel (A)	Rumpf (B)	Feder-Elemente (F)	Bungee-Seile (S)
RAYLEIGH-Dämpfung	$g_{m,v,A} = 0,14$ $g_{s,v,A} = 3,79 \cdot 10^{-6}$	$g_{m,v,B} = 1,92$ $g_{s,v,B} = 7,55 \cdot 10^{-6}$	$g_{s,v,Fxy} = 0$ $g_{s,v,Fz} = 0$	$g_{s,v,S} = 2,2 \cdot 10^{-2}$
Strukturelle Dämpfung	$g_{s,s,A} = 0,005$	$g_{s,s,A} = 0,012$	$g_{s,s,Fxy} = 0$ $g_{s,s,Fz} = 0$	$g_{s,s,S} = 0,1266$
Modale Dämpfung	mit $D_{gen}$	mit $D_{gen}$	nicht möglich	nicht möglich

**Tabelle 6.11.:** Proportionale Verlustfaktoren  $g$  der dämpfungsunbehandelten Komponenten

werden können, da sie bereits für die Berechnung der Substruktur-Dämpfungsmatrizen berücksichtigt sind.

Die Bungee-Seile können keine separaten Dämpfungsmatrixeinträge auf Basis der modalen Dämpfungen bekommen, da sie getestet wurden, können aber steifigkeitsproportionale Verlustfaktoren zugewiesen bekommen.

Somit haben die Dämpfungsmatrizen der Gesamtstruktur eine Form wie in Abb. 6.34d, bei der die Dämpfungsmatrizen der Substrukturen untereinander nicht gekoppelt sind. Sie sind außerdem außerordentlich speicherplatzfressend, da die Dämpfungsmatrizen der Substrukturen voll besetzt sind.

## 6.5.2. Ergebnisse

Tab. 6.11 listet die in Kap. 6.5.1 abgeschätzten Verlustfaktoren  $g$  auf. Sie macht ebenfalls noch einmal übersichtlich deutlich, wann welche Modellierungen für welche Abschnitte der gekoppelten Struktur verwendet werden können.

Die Verlustfaktoren für die Federelemente können nicht im Voraus bestimmt werden und sind für eine vorläufige Betrachtung zu Null gesetzt.

Die Verlustfaktoren  $g_{s,v,S}$  und  $g_{s,s,S}$  für die Bungee-Seile werden aus der Eigenkreisfrequenz und dem experimentell identifizierten modalen Dämpfungsmaß von (4) *RBM Heave* mithilfe Gl. (2.40) und Gl. (2.44) errechnet.

Mithilfe der Gesamtstruktur-Systemmatrizen kann das homogene diskretisierte Bewegungsdifferentialgleichungssystem eines allgemein viskos (siehe Gl. (2.73)) bzw. strukturell gedämpften Systems (siehe Gl. (2.88)) aufgestellt und das quadratische komplexe Eigenwertproblem gelöst werden.

Im Falle der RAYLEIGH-Dämpfung, der modalen viskosen Dämpfung und der modalen strukturellen Dämpfung sind die Systemmatrizen schlecht konditioniert sind und weisen sehr hohe Konditionszahlen  $\kappa$  auf. Sie verursachen bei einer Zuführung zu einer Eigenwertanalyse instabile, nicht nachvollziehbare Ergebnisse, die durch eine große Anzahl überkritisch gedämpfter elastischer Eigenformen gekennzeichnet sind. Außerdem beanspruchen sie sehr hohe Rechenressourcen, besonders im Falle der voll besetzten Substrukturdämpfungsmatrizen bei den modalen Dämpfungsmodellen.

Zur Verbesserung der Konditionierung der Matrizen beim viskos gedämpften Eigenwertproblem schlägt [23] eine Skalierung der Systemmatrizen auf Basis der Spektralnormen vor, die stabilere Lösungen vor allem bei MATLAB und bei Verwendung der Begleitformen Gl. (2.75a), Gl. (2.75b) und Gl. (2.75c) ermöglichen sollen.

Die Skalierung nach [23] brachte keine Verbesserung. Der Grund für das Versagen liegt wahrscheinlich in der Forderung, dass das betrachtete System schwach gedämpft sein soll, sodass gilt

$$||[D]||_2 \stackrel{!}{\leq} \sqrt{||[M]||_2 ||[K]||_2} \quad (6.4)$$

Diese Bedingung wird aber bei der frei gelagerten Laborstruktur nicht erfüllt, was vermutlich an den niederfrequenten, stark gedämpften Starrkörpereigenformen der Laborstruktur liegt.

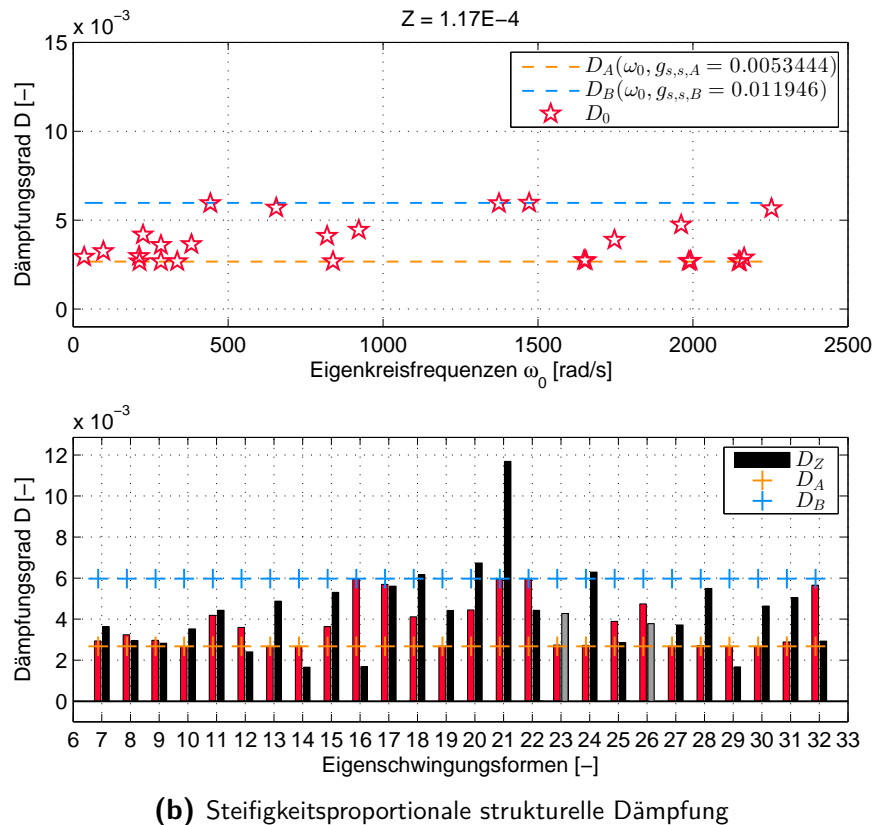
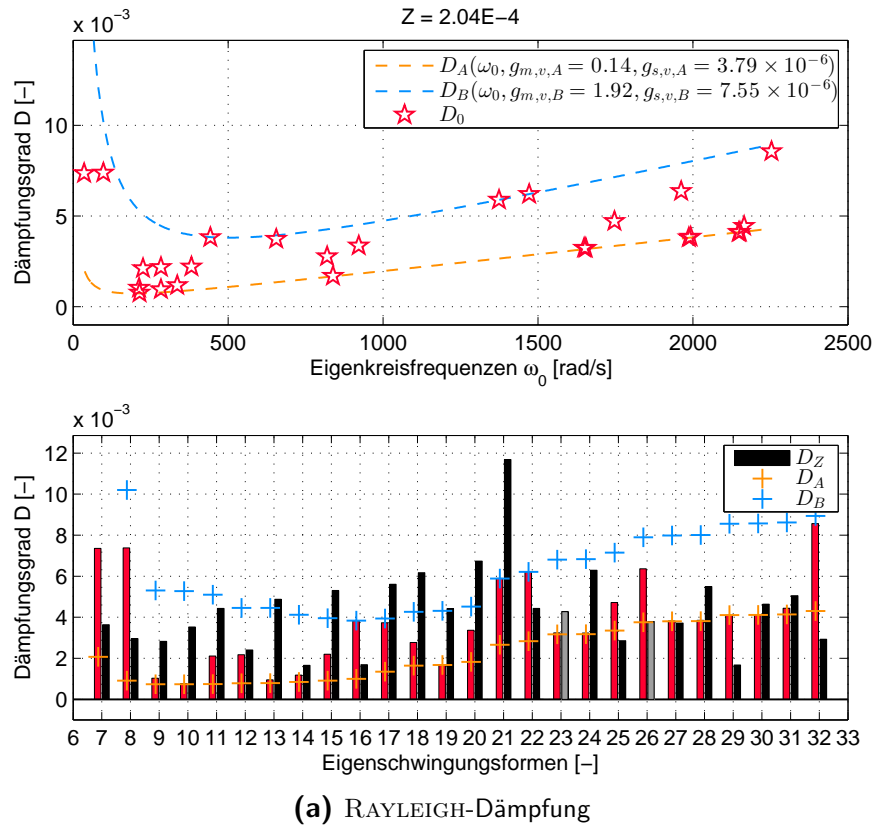
Stattdessen wird eine modale Kondensation der Systemmatrizen durchgeführt, wie es auch [37] als eine Vereinfachungsmöglichkeit vorschlägt. Sie bewirkt eine vielfache Reduktion der Freiheitsgrade und damit auch der Rechenzeit und -ressourcen. Sie liefert in allen Fällen stabile und nachvollziehbare Ergebnisse.

Für die modale Kondensation reichen bereits 35 Eigenformen für stabile sinnvolle Ergebnisse, die Berücksichtigung von mehr Eigenformen bewirkt keine Veränderung der modalen Eigenschaften.

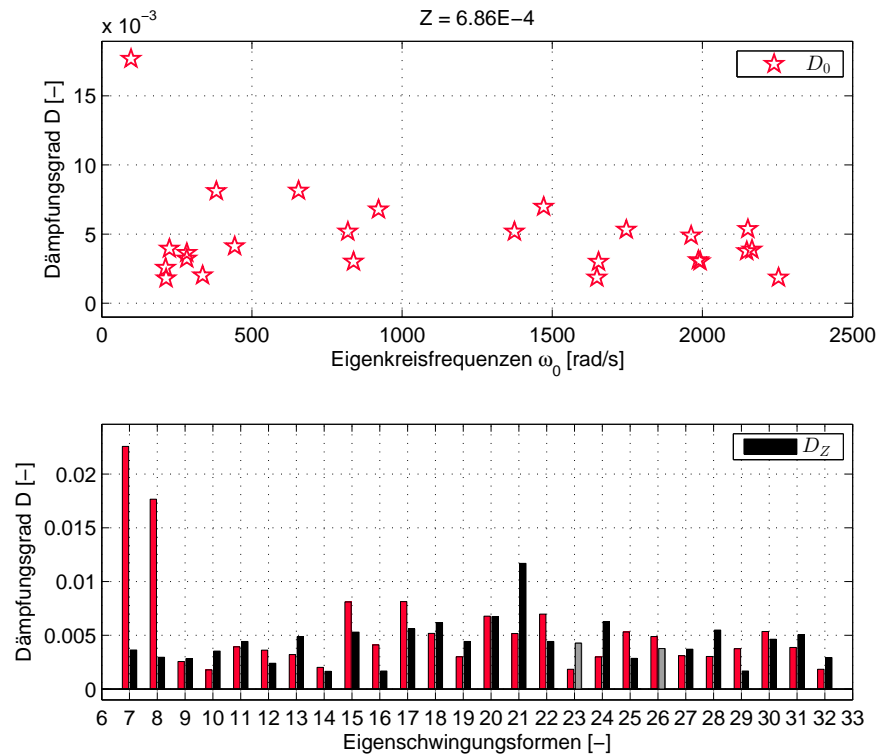
In Abb. 6.35 und Abb. 6.36 sind die Berechnungsergebnisse für die modalen Eigenschaften der elastischen Eigenformen der gekoppelten gedämpften Substrukturen dargestellt. Die Ergebnisse bestehen jeweils aus zwei Diagrammen.

Das jeweils obere Diagramm zeigt die globalen modalen Dämpfungsmaße der Gesamtstruktur-Eigenformen als rote Pentagramme  $D_0$ , aufgetragen über der Kreisfrequenz  $\omega$  bis  $\omega = 2500 \text{ rad/s}$  bzw.  $f \approx 398 \text{ Hz}$ . Es zeigt im Falle der RAYLEIGH-Dämpfung und der steifigkeitsproportionalen strukturellen Dämpfung außerdem den Zusammenhang von Substruktur-Dämpfungsgrad und Kreisfrequenz für die Flügel-Struktur (A) in orange und für die Rumpf-Leitwerk-Struktur (B) in blau.

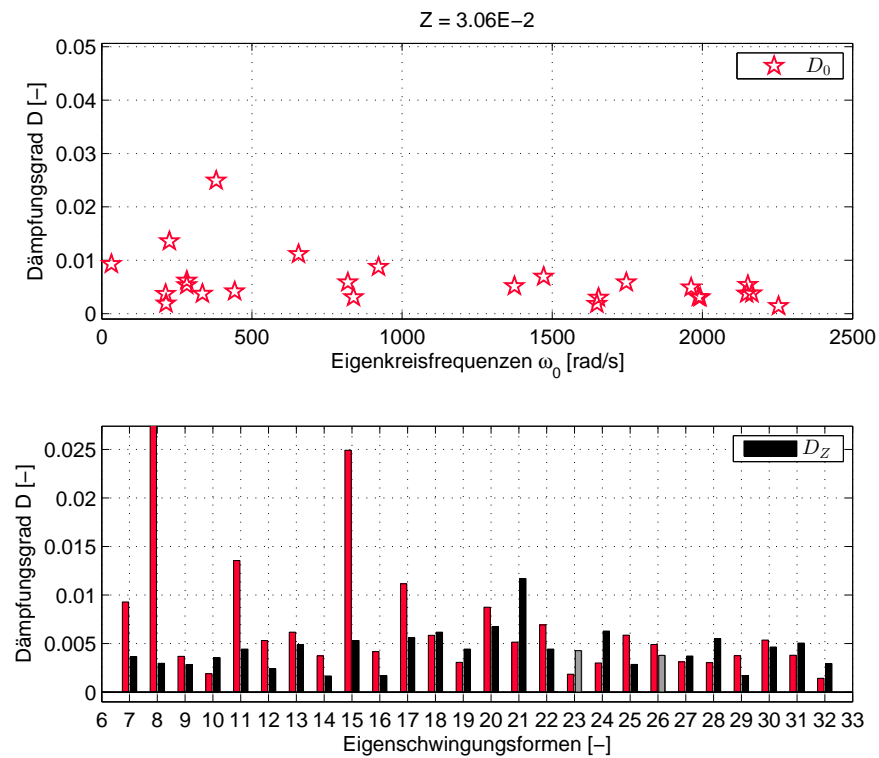
Das jeweils untere Diagramm zeigt wieder die modalen globalen Dämpfungsmaße  $D_0$  in rot, aufgetragen als Balken über die Eigenformen. Es zeigt zusätzlich die experimentell ermittelten, gemäß Kap. 6.4.2 zugeordneten experimentell ermittelten globalen modalen Dämpfungsmaße  $D_Z$  in schwarz an. Es zeigt dabei gemäß Kap. 6.4.3 als unzuverlässig identifiziert bewertete Dämpfungsmaße in grau an. Es zeigt im Falle der RAYLEIGH-Dämpfung



**Abbildung 6.35.:** Ergebnisse der Kopplung der proportionalen gedämpften Substrukturen mit abgeschätzten Verlustfaktoren  $g$



(a) Modale viskose Dämpfung



(b) Modale strukturelle Dämpfung

**Abbildung 6.36.:** Ergebnisse der Kopplung der proportionalen gedämpften Substrukturen mit abgeschätzten Verlustfaktoren  $g$

und der steifigkeitsproportionalen strukturellen Dämpfung außerdem je Eigenform den jeweils geltenden Zusammenhang zwischen Dämpfungsgrad der Substruktur und Kreisfrequenz als oranges und blaues Plus an.

Der Wert  $Z$  im Titel wird gemäß Gl. (4.1) definiert, wobei

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_7 \\ \vdots \\ \varepsilon_{23} \\ \vdots \\ \varepsilon_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{0,7} - D_{Z,7} \\ \vdots \\ D_{0,23} - D_{Z,23} \\ \vdots \\ D_{0,32} - D_{Z,32} \end{Bmatrix} \text{ und } [W_\varepsilon] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0,1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Experimentell identifizierte, als unsicher eingestufte globale Dämpfungsmaße, dargestellt als graue Balken, werden dabei deutlich schwächer gewichtet.

Abb. 6.35 zeigt die Ergebnisse für die RAYLEIGH-Dämpfung und die strukturelle Dämpfung mit dämpfungsunbehandelten Komponenten und in Tab. 6.11 abgeschätzten Verlustfaktoren  $g$ . Es zeigt sich, dass alle globalen Dämpfungsmaße  $D_0$  zwischen den Grenzen liegen, die durch die Zusammenhänge von Dämpfungsgrad und Frequenz in den Substrukturen gesetzt werden. Dies konnte bereits von den Ergebnissen der Platte erwartet werden.

Bei der RAYLEIGH-Dämpfung in Abb. 6.35a sind die Differenzen  $\varepsilon$  zwischen den errechneten und den experimentell ermittelten Dämpfungsmaße groß. Sie sind besonders bei den niederfrequenten Eigenformen deutlich sichtbar, wobei der massenproportionale Verlustfaktoren  $g_{m,v,B}$  hauptverantwortlich für die großen Differenzen bei den ersten zwei elastischen Eigenformen ist. Erst bei den Eigenformen ab 250 Hz werden die Differenzen geringer.

Die Starrkörpereigenformen (RBM), die die Bungee-Seile nicht belasten und im FE-Rechenmodell eine Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  von 0 Hz aufweisen, weisen Dämpfungsmaße von 100 % auf. Die RBM, die die Bungee-Seile belasten, weisen trotz expliziter Zuweisung eines steifigkeitsproportionalen viskosen Verlustfaktoren  $g_{s,v,S}$  zu hohe Dämpfungsmaße von 20 bis 40 % auf.

Die je Substruktur zugewiesene RAYLEIGH-Dämpfung, deren Verlustfaktoren  $g$  experimentell vorher abgeschätzt worden sind, kann gekoppelt somit die tatsächlich wirkende Dämpfung der Gesamtstruktur nicht genügend abbilden.

Bei der steifigkeitsproportionalen strukturellen Dämpfung in Abb. 6.35b sind die Differenzen allgemein sichtbar kleiner bei der RAYLEIGH-Dämpfung. Besonders bei den niederfrequenten elastischen Eigenformen sind die Differenzen sehr klein. Abgesehen von den Ausreißern 13 und 21 nehmen die individuellen Differenzen erst bei höheren Frequenzen ab 300 Hz zu. Die deutlich niedrigeren Differenzen werden auch durch einen 40 % geringeren Wert der Summe der Fehlerquadrate  $Z$  gegenüber der RAYLEIGH-Dämpfung widerspiegelt.

Die pendelnden RBM weisen wie bei der RAYLEIGH-Dämpfung Dämpfungsmaße von 100 % auf. Die RBM, die die Bungee-Seile belasten, weisen allesamt nahezu exakt den Dämpfungsgrad auf, der durch  $g_{s,s,S}$  zugewiesen wurde.

Die je Substruktur zugewiesene steifigkeitsproportionale strukturelle Dämpfung kann gekoppelt die tatsächlich wirkende Dämpfung der Gesamtstruktur nicht nur besser als die RAYLEIGH-Dämpfung, sondern auch allgemein betrachtet sehr gut für die elastischen und die Starrkörpereigenformen beschreiben.

Bei den modalen Dämpfungmodellierungen ist es sinnvoll, vorher einige Überlegung hinsichtlich der erwarteten Ergebnisse anzustellen. Diese Überlegungen basieren wie in Kap. 2.3.3 auf zwei Mehr-Freiheitsgrad-Systemen, die die gleichen Systemmatrizen  $[M]$  und  $[K]$  besitzen, mit jeweils einer Form modaler Dämpfung versehen sind und deren Dämpfungsmatrizen  $[D]$  bzw.  $[C]$  mit den gleichen Dämpfungsmaßen  $D_{gen}$  erstellt worden sind.

$$[M] \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_A(t)\} \\ \{\ddot{u}_B(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [D_A] & [0] \\ [0] & [D_B] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}_A(t)\} \\ \{\dot{u}_B(t)\} \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} \{u_A(t)\} \\ \{u_B(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (6.6a)$$

$$[M] \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_A(t)\} \\ \{\ddot{u}_B(t)\} \end{Bmatrix} + \left( [K] + i \begin{bmatrix} [C_A] & [0] \\ [0] & [C_B] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{u_A(t)\} \\ \{u_B(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (6.6b)$$

Das Besondere bei den Systemmatrizen in diesem Fall ist die fehlende Kopplung zwischen den Substruktur-Dämpfungsmatrizen  $[D_A]$  und  $[D_B]$  bzw.  $[C_A]$  und  $[C_B]$ , wie bezüglich Abb. 6.34d aufgrund der Dämpfungsformulierung bereits erläutert wurde. Durch eine Lineartransformation mit dem Ansatz

$$\begin{Bmatrix} \{u_A(t)\} \\ \{u_B(t)\} \end{Bmatrix} = [\bar{\Phi}] \begin{Bmatrix} \{q_A(t)\} \\ \{q_B(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi_A] & [0] \\ [0] & [\Phi_B] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_A(t)\} \\ \{q_B(t)\} \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

gelangt man so zu

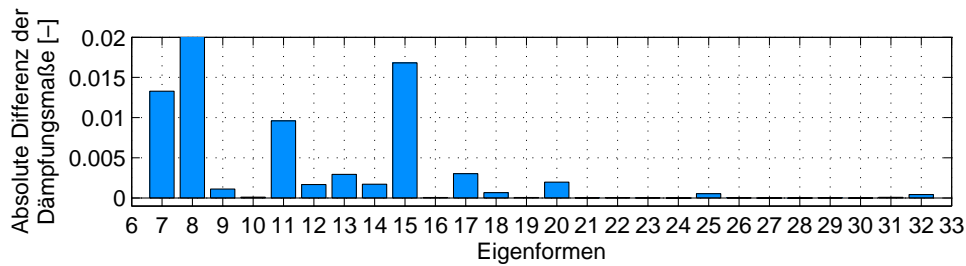
$$[M]_{gen} \begin{Bmatrix} \{\ddot{q}_A(t)\} \\ \{\ddot{q}_B(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [D_A]_{gen} & [0] \\ [0] & [D_B]_{gen} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{q}_A(t)\} \\ \{\dot{q}_B(t)\} \end{Bmatrix} + [K]_{gen} \begin{Bmatrix} \{q_A(t)\} \\ \{q_B(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (6.8a)$$

$$[M]_{gen} \begin{Bmatrix} \{\ddot{q}_A(t)\} \\ \{\ddot{q}_B(t)\} \end{Bmatrix} + \left( [K]_{gen} + i \begin{bmatrix} [C_A]_{gen} & [0] \\ [0] & [C_B]_{gen} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{q_A(t)\} \\ \{q_B(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (6.8b)$$

Die bezüglich des Gesamtsystems nichtproportionalen Dämpfungsmatrizen  $[D]$  und  $[C]$  sind durch diese Transformation diagonal und bezüglich der Dämpfung modal entkoppelt. Mit dem Exponentialansatz  $q(t) = \hat{q}e^{i\Omega t}$  gelingt dann die Schlussfolgerung wie in Kap. 2.3.3, dass beide Mehr-Freiheitsgrad-Systeme das gleiche Systemverhalten aufweisen und die gleichen Dämpfungsmaße bei einer Eigenwertanalyse zu erwarten sind.

Unterschiedliche Ergebnisse zweier Mehr-Freiheitsgrad-Systeme mit jeweils einer Form modaler Dämpfung sind dann zu erwarten, wenn eine Diagonalisierung der Dämpfungsmatrizen durch eine Lineartransformation nicht möglich ist, beispielsweise bei einer Kopplung der dämpfungsbehafteten Substrukturen durch koinzidente Freiheitsgrade (wie bei der Platte) oder diskrete Dämpferelemente. Sie werden bei der vorliegenden Struktur in der weiteren Untersuchung aber nicht extra durch solche Maßnahmen hervorgerufen, da dazu eine Neukonzeption und Neuanpassung des FE-Rechenmodells nötig ist.

Außerdem ist zu erwarten, dass Eigenformen der Gesamtstruktur über einer bestimmten Frequenz nicht mehr gedämpft werden, da bei den Substrukturen aufgrund der Formulierung nur eine begrenzte Anzahl der Eigenformen gedämpft werden.



**Abbildung 6.37.:** Unterschied zwischen den berechneten globalen modalen Dämpfungsmaßen der modalen Dämpfungsmodellierungen

Abb. 6.36 zeigt die Ergebnisse für die modale viskose Dämpfung und die modale strukturelle Dämpfung. Die Ergebnisse können leichter interpretiert werden, wenn die absoluten Differenzen der globalen Dämpfungsmaße  $D_0$  von beiden Rechnungen, abgebildet in Abb. 6.37, betrachtet werden.

Bei 13 von 26 Eigenformen, überwiegend ab 250 Hz bei den stark flügeldominierten Eigenformen, stimmen die Dämpfungsmaße exakt überein. Bei 9 weiteren liegt die absolute Abweichung unter 0.005. Bei den restlichen vier Eigenformen, die alle vier jeweils eine starke Starrkörperbewegung des Rumpfes aufweisen, sind die Abweichungen, aber auch die individuellen modalen Dämpfungsmaße sehr hoch. Alle Eigenformen, die über 400 Hz liegen, werden nicht gedämpft.

Die Abweichungen widersprechen der Vorhersage, dass für die FE-modellierte Laborstruktur bei einer komplexen Eigenwertanalyse bei beiden Dämpfungsmodellierungen die gleichen globalen modalen Dämpfungsmaße berechnet werden.

Hilfreich bei einer Erklärung könnte sein, dass die berechneten Eigenwerte der Starrkörpereigenformen bei beiden Modellen stark unterschiedlich sind. Dies liegt an der schlechten Konditionierung der modal kondensierten Systemmatrizen bei niedrigen Eigenwerten, sodass Eigenwerte unter einer bestimmten Grenze, in diesem Fall bei einer Eigenfrequenz  $f_0$  von 5 Hz, stabil, aber nicht korrekt berechnet werden.

Die Eigenkreisfrequenzen der Starrkörpereigenformen sind bei beiden Modellen zu hoch berechnet, liegen aber trotzdem unter 5 Hz. Sie liegen dadurch näher an den Frequenzen der niederfrequenten Eigenformen und haben dadurch mehr Einfluss auf deren modalen Eigenschaften, besonders bei jenen mit teilweiser Starrkörperbewegung. Sind zusätzlich die berechneten Dämpfungsmaße der Starrkörpereigenformen sehr hoch, wie in diesem Fall bei über 70 %, werden auch niederfrequente elastische Eigenformen höher gedämpft.

Zusätzlich zu den hohen Dämpfungen kommen dann Abweichungen aufgrund der unterschiedlich hohen Frequenzen und unterschiedlich hohen Dämpfungsmaße der Starrkörpereigenformen zustande.

Die hohen Dämpfungsmaße sowie die Abweichungen bei niederfrequenten elastischen Eigenfor-



men sind somit in stabil berechneten, aber ungenauen Eigenwerten der Starrkörpereigenformen begründet. Gemäß der analytischen Erwartung würden bei korrekter Berechnung also die gleichen Eigenwerte berechnet werden.

Um trotz der verzerrten Ergebnisse einen Vergleich mit den errechneten Dämpfungsmaßen bei RAYLEIGH-Dämpfung und bei steifigkeitsproportionaler struktureller Dämpfung anstellen zu können, wird  $Z$  nur bezüglich jener Eigenformen berechnet, die bei den modalen Dämpfungsmodellierungen keine Abweichungen aufweisen.  $Z$  beträgt dann für die RAYLEIGH-Dämpfung  $1,10 \cdot 10^{-4}$ , für die steifigkeitsproportionale strukturelle Dämpfung  $0,97 \cdot 10^{-4}$  und für die modalen Dämpfungsmodellierungen  $0,91 \cdot 10^{-4}$ .  $Z$  ist also – begrenzt auf diese Eigenformen – bei den modalen Modellierungen am kleinsten, aber die Dämpfungsmaße werden bei allen drei Modellierungen für die hochfrequenten Eigenformen nicht sonderlich gut getroffen.

Abb. A.21 und Abb. A.22 zeigen die Ergebnisse für die dämpfungsbehandelte Gesamtstruktur. Sie führen zu den gleichen Schlüssen wie für die dämpfungsunbehandelte Gesamtstruktur.

### 6.5.3. Bewertung

In diesem Abschnitt werden die angewandten Dämpfungsmodellierungen dahingehend bewertet, wie gut die durch abgeschätzte Verlustfaktoren  $g$  oder experimentell ermittelten modalen Dämpfungsmaße proportional gedämpften Substrukturen das Dämpfungsverhalten der Gesamtstruktur abbilden und wie aufwändig ihre rechnerische Handhabung ist.

RAYLEIGH-Dämpfung kann die Dämpfung der Gesamtstruktur nur sehr schlecht abbilden. Sie geht von sehr stark gedämpften Starrkörper-, relativ stark gedämpften niederfrequenten und hochfrequenten Eigenformen aus, aber solch ein Zusammenhang von Dämpfung und Kreisfrequenz tritt in der Regel bei metallischen Strukturen und auch bei der vorliegenden Laborstruktur nicht auf. Sie ist daher sehr ungenau und ungeeignet.

Sie hat dafür den Vorteil, dass sich eine einfache Berechnung der Dämpfungsmatrix  $[D]$  durch die Verlustfaktoren  $g$  erlaubt und dass sie flexibel und nachvollziehbar unterschiedlichen Abschnitten, wie Strukturen und Verbindungselementen, zugewiesen werden kann.

Das Eigenwertproblem kann auch bei großen Systemen und schlecht konditionierten Systemmatrizen in kurzer Rechenzeit und mit wenig Rechenkraft gelöst werden. Es kann unter Umständen aber numerisch instabile Ergebnisse liefern, sodass eine Skalierung oder eine Reduktion von Freiheitsgraden wie im vorliegenden Fall notwendig wird.

Eine einfache Handhabung der RAYLEIGH-Dämpfung in MSC.NASTRAN ist nicht gegeben, da dadurch zusätzlich *Superelements* definiert und verwaltet werden müssen.

Die steifigkeitsproportionale strukturelle Dämpfung, die als ein Ansatz zum ESD in [37] vorgestellt wird, kann das Dämpfungsverhalten der Gesamtstruktur sehr gut abbilden. Sie sagt insbesondere die Dämpfungsmaße der niederfrequenten elastischen Gesamtstruktur-Eigenformen

sehr gut voraus.

Sie erlaubt eine einfache Berechnung der Dämpfungsmatrix  $[C]$  mittels Verlustfaktoren  $g$  und kann flexibel verschiedenen Abschnitten der Struktur zugewiesen werden. So kann sie beispielsweise modale Dämpfungsmaße der Starrkörpereigenformen durch Zuweisung eines strukturellen Verlustfaktors an die Lagerung sehr genau berücksichtigen.

Das Eigenwertproblem ist auch für große Systeme sehr schnell und mit wenig Rechenaufwand möglich. Es ist für die Laborstruktur die einzige Analyse, die keine Reduktion der Freiheitsgrade erfordert.

Sie besitzt weiterhin den Vorteil, dass sie über Materialkarten und vorgesehene Einträge in MSC.NASTRAN vielen Strukturelementen einfach zugewiesen kann und für den dortigen Einsatz schon vorgesehen ist. Sie benötigt keiner Definition von *Superelements*.

Die modalen Dämpfungsmodellierungen, wovon die Formulierung mit struktureller Dämpfung zu einem weiteren Ansatz zum ESD gehört, können hinsichtlich in ihrer Genauigkeit nicht abschließend bewertet werden. Sie bieten, in den nachvollziehbaren Fällen, bei der Vorhersage des Dämpfungsverhaltens eine gewisse Genauigkeit, die sich aber nicht deutlich von den anderen zwei Modellen abhebt.

Eine explizite Dämpfungskopplung der Substrukturen würde zudem unterschiedliche Ergebnisse für das Dämpfungsverhalten des Gesamtsystems liefern. Dies ist aber bei der vorliegenden FE-Modellierung nicht vorgesehen, sodass ein Vergleich beider modaler Dämpfungsmodellierungen nicht möglich ist.

Die jeweiligen Substruktur-Dämpfungsmatrizen  $[D]$  können leicht berechnet werden und spiegeln die experimentell ermittelte Dämpfungsmaße exakt wieder. Sie müssen allerdings die jeweiligen Randbedingungen der Substruktur-Tests genau einhalten, da die Berechnungsvorschrift die Eigenformen mit einschließt und die Anzahl der Freiheitsgrade sich nicht verändern darf.

Sie sind allerdings voll besetzt und bei großen Systemen so außerordentlich speicherplatzbedürftig, dass sie besonders bei einer Kopplung nur auf sehr starken Prozessoren, mit viel Arbeitsspeicher und mit einer Reduktion der Freiheitsgrade berechnet werden können. Das Eigenwertproblem wies aber selbst bei einer modalen Kondensation eine schlechte Konditionierung der Systemmatrizen auf, was einen Einfluss auf die Ergebnisfindung im vorliegenden Fall hatte.

Die modale viskose Dämpfungsmodellierung kann in MSC.NASTRAN eingesetzt werden, wenn *Superelements* definiert werden und mittels Tabellen die Substruktur-Dämpfungsmaße explizit in einer Tabelle der jeweiligen Eigenkreisfrequenz der Substruktur-Eigenform zugeordnet wird. Die modale strukturelle Dämpfung ist in MSC.NASTRAN nicht umsetzbar.

Die Auswertung zeigt, dass die steifigkeitsproportionale strukturelle Dämpfung bei hoher Vorhersagekraft und stabilen genauen Ergebnissen eine sehr einfache Handhabung ermöglicht und

wenig Rechenaufwand erfordert.

## 6.6. Computergestützte Modellanpassung

Das Verfahren zur computergestützten Modellanpassung wird im folgenden Abschnitt zur Berechnung der Eigenwertsensitivität auf analytischem Wege und in einer abgewandelten Form zur automatischen Anpassung modaler globaler Dämpfungsmaße genutzt. Es wird wie bei der Platte ausschließlich auf die viskose RAYLEIGH-Dämpfung und die steifigkeitsproportionale strukturelle Dämpfung angewandt. Es dient zur weiteren Anwendung des Verfahrens auf reale Labortestdaten und einer genaueren Bewertung des Verfahrens.

### 6.6.1. Untersuchung der Sensitivität

Die Eigenwertsensitivitäten für die elastischen Eigenformen bezüglich der RAYLEIGH-Dämpfung und der steifigkeitsproportionalen strukturellen Dämpfung sind in Abb. 6.38 dargestellt. Sie werden wie in Kap. 5.3.1 ausschließlich mit Eigenwerten mit  $\Im(\lambda) > 0$  berechnet und verwenden zur Variation der Verlustfaktoren  $g$  ein  $\partial g$  von 0,001 %.

Die Eigenwertsensitivitätsmatrix  $[G_\lambda]$  für die viskose Dämpfung ist hier definiert zu

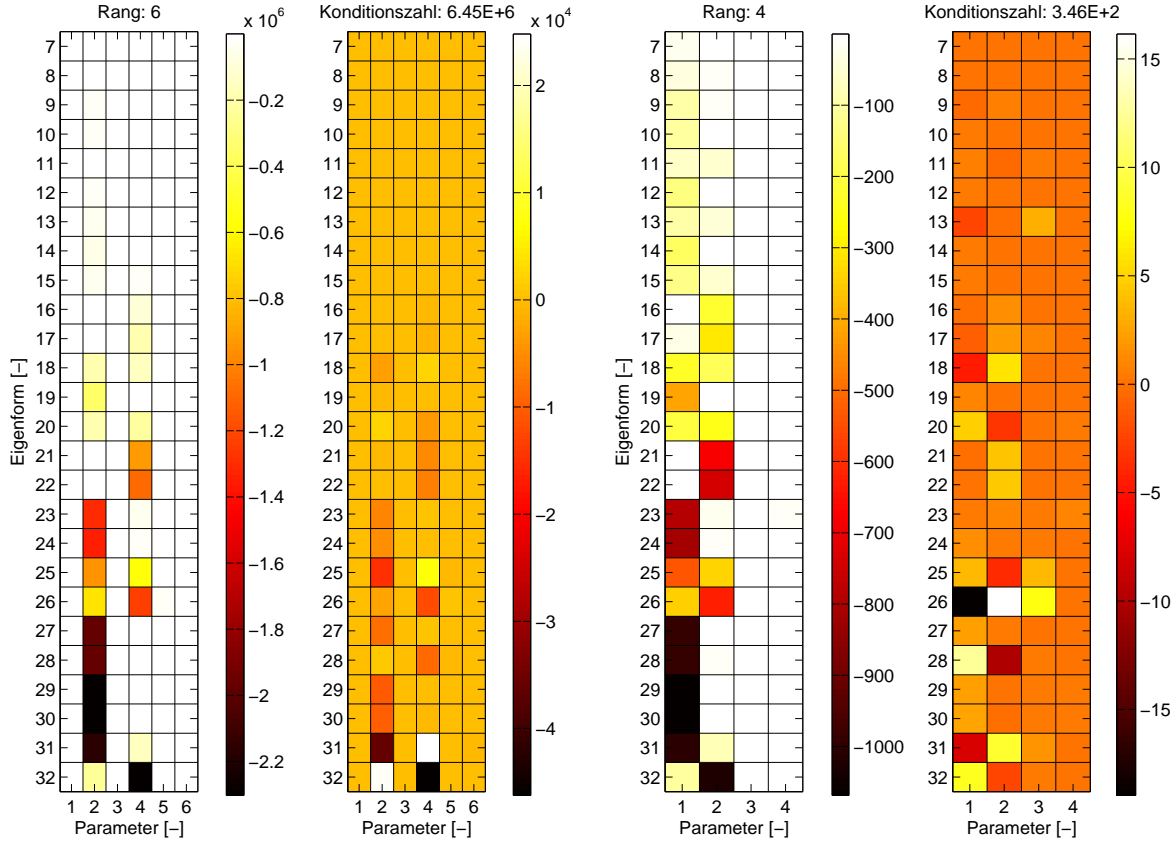
$$[G_\lambda] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_7}{\partial g_{m,v,A}} & \frac{\partial \lambda_7}{\partial g_{s,v,A}} & \frac{\partial \lambda_7}{\partial g_{m,v,B}} & \frac{\partial \lambda_7}{\partial g_{s,v,B}} & \frac{\partial \lambda_7}{\partial g_{s,v,Fxy}} & \frac{\partial \lambda_7}{\partial g_{s,v,Fz}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \lambda_{32}}{\partial g_{m,v,A}} & \frac{\partial \lambda_{32}}{\partial g_{s,v,A}} & \frac{\partial \lambda_{32}}{\partial g_{m,v,B}} & \frac{\partial \lambda_{32}}{\partial g_{s,v,B}} & \frac{\partial \lambda_{32}}{\partial g_{s,v,Fxy}} & \frac{\partial \lambda_{32}}{\partial g_{s,v,Fz}} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Die in Gl. (6.9) verwendeten Verlustfaktoren  $g$  sind ausschließlich sensitiv für elastische Eigenformen. Der Verlustfaktor  $g_{s,v,S}$  ist für Starrkörper- und elastische Eigenformen fast vollkommen insensitiv, weshalb er vernachlässigt wird. Aus diesen Gründen ist die Sensitivitätsmatrix in ihrer Darstellung reduziert.

Der Realteil der Sensitivitätsmatrix zeigt wie in Kap. 5.3.1, dass eine Erhöhung der Verlustfaktoren in allen Fällen zu einer Erhöhung der Dämpfung führt, erkennbar an dem Sinken des Realteils. Er zeigt außerdem, dass besonders bei  $g_{s,v}$  die Dämpfung stark ansteigt. Er macht außerdem gut erkennbar, welche Eigenformen flügel- oder rumpfdominiert sind und welcher modaler Dämpfungsgrad durch eine Veränderung von  $g_{s,v,A}$  oder  $g_{s,v,B}$  besonders ansteigt.

Der Imaginärteil der Sensitivität ist in etwa hundertfach kleiner als der Realteil und kann aufgrund kleiner Ungenauigkeiten des analytischen Verfahrens auch positiv werden, trotz eines tatsächlichen Anstiegs der Dämpfung.

Die Sensitivitätsmatrix ist an keiner Stelle Null, sodass alle Verlustfaktoren  $g$  sensitiv sind. Sie hat vollen Rang, sodass sie invertierbar und für eine computergestützte Modellanpassung anwendbar ist. Ihre Konditionszahl  $\kappa_G$  ist annehmbar.



(a) Komplexe Eigenwertsensitivität  $G_\lambda$  (links Realteil, rechts Imaginärteil) bei RAYLEIGH-Dämpfung

(b) Komplexe Sensitivitätsmatrix  $G_\lambda$  (links Realteil, rechts Imaginärteil) bei struktureller Dämpfung

**Abbildung 6.38.:** Komplexe Sensitivitätsmatrizen für die Laborstruktur

Die Eigenwertsensitivität  $[G_\lambda]$  für die strukturelle Dämpfung ist hier definiert zu

$$[G_\lambda] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_7}{\partial g_{s,s,A}} & \frac{\partial \lambda_7}{\partial g_{s,s,B}} & \frac{\partial \lambda_7}{\partial g_{s,s,Fxy}} & \frac{\partial \lambda_7}{\partial g_{s,s,Fz}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \lambda_{32}}{\partial g_{s,s,A}} & \frac{\partial \lambda_{32}}{\partial g_{s,s,B}} & \frac{\partial \lambda_{32}}{\partial g_{s,s,Fxy}} & \frac{\partial \lambda_{32}}{\partial g_{s,s,Fz}} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Die hier verwendeten Verlustfaktoren  $g$  zeigen sich nur sensitiv für elastische Eigenformen. Der Verlustfaktor  $g_{s,s,S}$  ist nur für die Starrkörpereigenformen sensitiv, die die Bungee-Seile belasteten. Aufgrund der experimentellen Identifikation von nur einer der Eigenformen und der exakten Zuweisung des modalen Dämpfungsgrades an diese Eigenform durch den Verlustfaktoren  $g_{s,s,S}$  ist keine Anpassung nötig, sodass nur die modalen Dämpfungsmaße der elastischen Eigenformen einer Anpassung bedürfen.

Die Sensitivitätsmatrix liefert die gleichen Erkenntnisse wie bei der RAYLEIGH-Dämpfung, hier allerdings bezogen auf die strukturellen Koeffizienten  $g_{s,s}$ .

### 6.6.2. Automatische Anpassung globaler modaler Dämpfungsmaße

Das Programm, das zur automatischen Anpassung der modalen Dämpfungsmaße in MATLAB geschrieben wurde und seine Funktion bei konsistenten und inkonsistenten Fällen bei der Platte in Kap. 5.3.2 nachweisen konnte, wird im Folgenden in abgewandelter Form zur Anpassung an die realen Testdaten angewandt.

Das Residuum

$$\{\varepsilon\}_q = \{\Delta\lambda\}_q = \{\lambda_m\} - \{\lambda_a\}_q \quad (6.11)$$

kann hier allerdings nicht mehr angewandt werden, da die Eigenkreisfrequenzen  $\omega_0$  der Messdaten  $\{\lambda_m\}$  eine große Differenz zu den Eigenkreisfrequenzen der aus dem FE-Modell berechneten modalen Daten  $\{\lambda_a\}$  aufweisen.  $\{\Delta\lambda\}$  wäre stark komplex und folglich auch  $\{\Delta g\}$  gemäß Gl. (4.5).

Stattdessen wird das Gleichungssystem in Gl. (4.4) auf beiden Seiten und in jeder Zeile mit  $\frac{\partial D_j}{\partial \lambda_j}$  multipliziert.

$$\begin{Bmatrix} \Delta\lambda_1 \frac{\partial D_1}{\partial \lambda_1} \\ \vdots \\ \Delta\lambda_j \frac{\partial D_j}{\partial \lambda_j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_{a,1}}{\partial g_1} \frac{\partial D_1}{\partial \lambda_1} & \dots & \frac{\partial \lambda_{a,1}}{\partial g_k} \frac{\partial D_1}{\partial \lambda_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \lambda_{a,j}}{\partial g_1} \frac{\partial D_j}{\partial \lambda_j} & \dots & \frac{\partial \lambda_{a,j}}{\partial g_k} \frac{\partial D_j}{\partial \lambda_j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta g_1 \\ \vdots \\ \Delta g_k \end{Bmatrix} \quad (6.12)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta D_1 \\ \vdots \\ \Delta D_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D_{a,1}}{\partial g_1} & \dots & \frac{\partial D_{a,1}}{\partial g_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial D_{a,j}}{\partial g_1} & \dots & \frac{\partial D_{a,j}}{\partial g_k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta g_1 \\ \vdots \\ \Delta g_k \end{Bmatrix} \quad (6.13)$$

$$= [G_D] \{\Delta g\}$$

Für den j-ten komplexen Eigenwert  $\lambda_j$  mit  $\Im(\lambda_j) > 0$  gilt bei allgemein viskoser Dämpfung bzw. bei allgemein struktureller Dämpfung

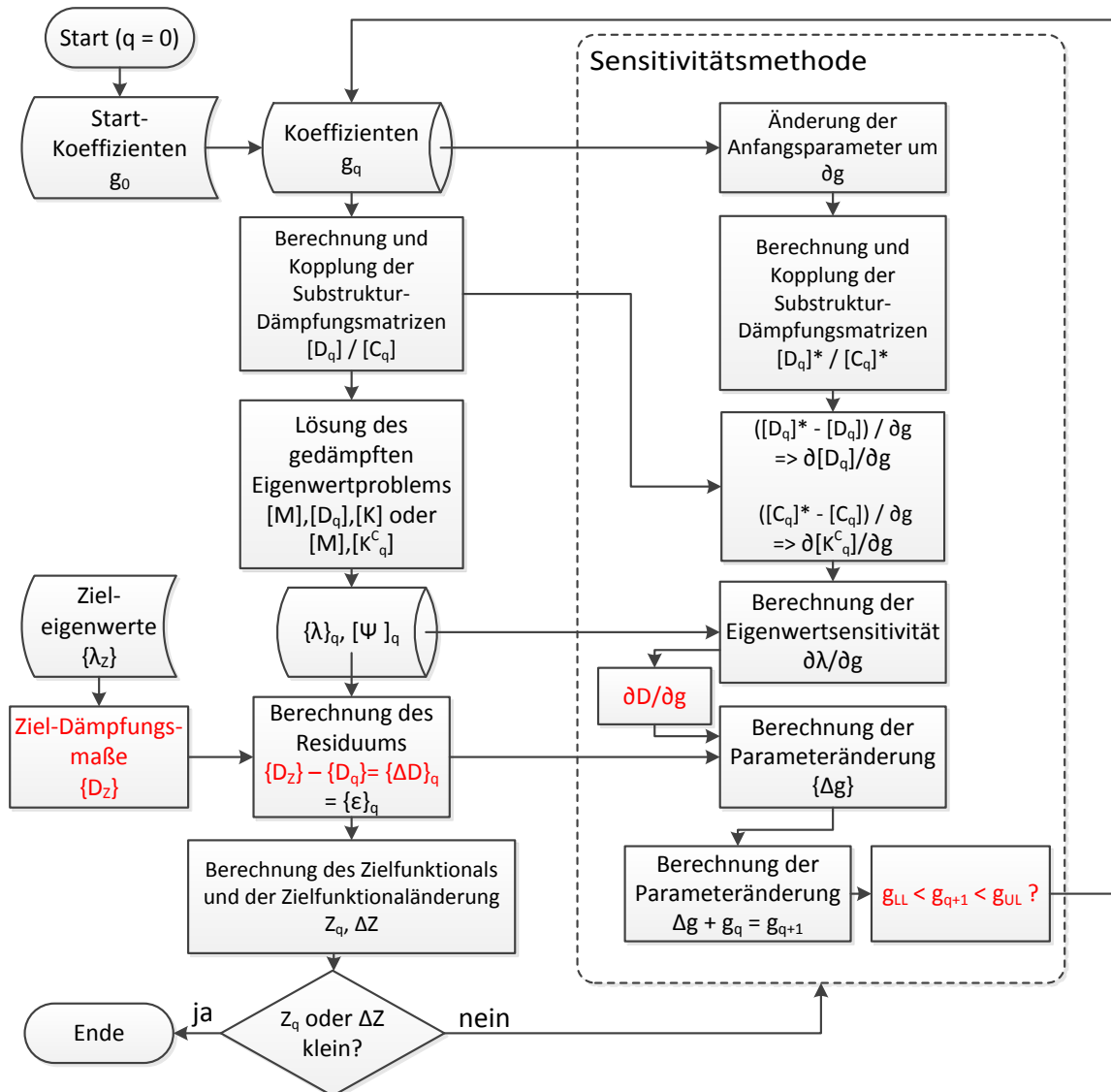
$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial D_j} = -\omega_{0,j} \left( 1 + i \frac{D_j}{\sqrt{1 - D_j^2}} \right) \quad (6.14a)$$

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial D_j} = -\omega_{0,j} \frac{1}{\sqrt{1 + i2D_j}} \quad (6.14b)$$

Das Residuum  $\{\varepsilon\}$  muss nicht gemäß Gl. (6.12) berechnet werden, sondern kann direkt aus den Differenzen der modalen Dämpfungsgrade bestimmt werden.

Bei einer pseudo-invertierbaren Matrix  $[G_D]$  lautet dann die Gleichung zur Berechnung der Änderung der Verlustfaktoren  $g$

$$\{\Delta g\} = [G_D]^+ \{\Delta D\} \quad (6.15)$$



**Abbildung 6.39.:** Abgeändertes Flussdiagramm zur Umsetzung der computergestützten automatischen Modellanpassung bei der Laborstruktur

Infolge der sehr schwach komplexen Sensitivitätsmatrix  $[G_D]^+$  und des reellen Residuums  $\{\varepsilon\} = \{\Delta D\}$  ist  $\{\Delta g\}$  schwach komplex und darf somit zu  $\{\Delta g\} \approx \Re(\{\Delta g\})$  vereinfacht werden.

Zusätzlich wird darauf geachtet, dass neu berechnete Verlustfaktoren  $g_{q+1}$  innerhalb physikalischer Grenzen liegen.

Das Flussdiagramm in [Abb. 5.5](#) ändert sich so zu [Abb. 6.39](#).

Die Errechnung des Zielfunktionalen erfolgt mit einer Wichtungsmatrix  $[W_\varepsilon]$  gemäß Gl. (6.5) verwendet, weil eine Normierung des Dämpfungsmaßes aufgrund der Unabhängigkeit von der Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  nicht notwendig ist und um eine Verbesserung von  $Z$  gegenüber den Anfangslösungen rechnerisch bewerten zu können.

Die Anfangswerte für die computergestützte Modellanpassung sind [Tab. 6.11](#) zu entnehmen. Die Verlustfaktoren der Federn wurden freigegeben und willkürlich auf  $g_{s,v,Fxy} = g_{s,v,Fz} = 5 \cdot 10^{-4}$  für RAYLEIGH-Dämpfung und  $g_{s,s,Fxy} = g_{s,s,Fz} = 0, 1$  gesetzt.

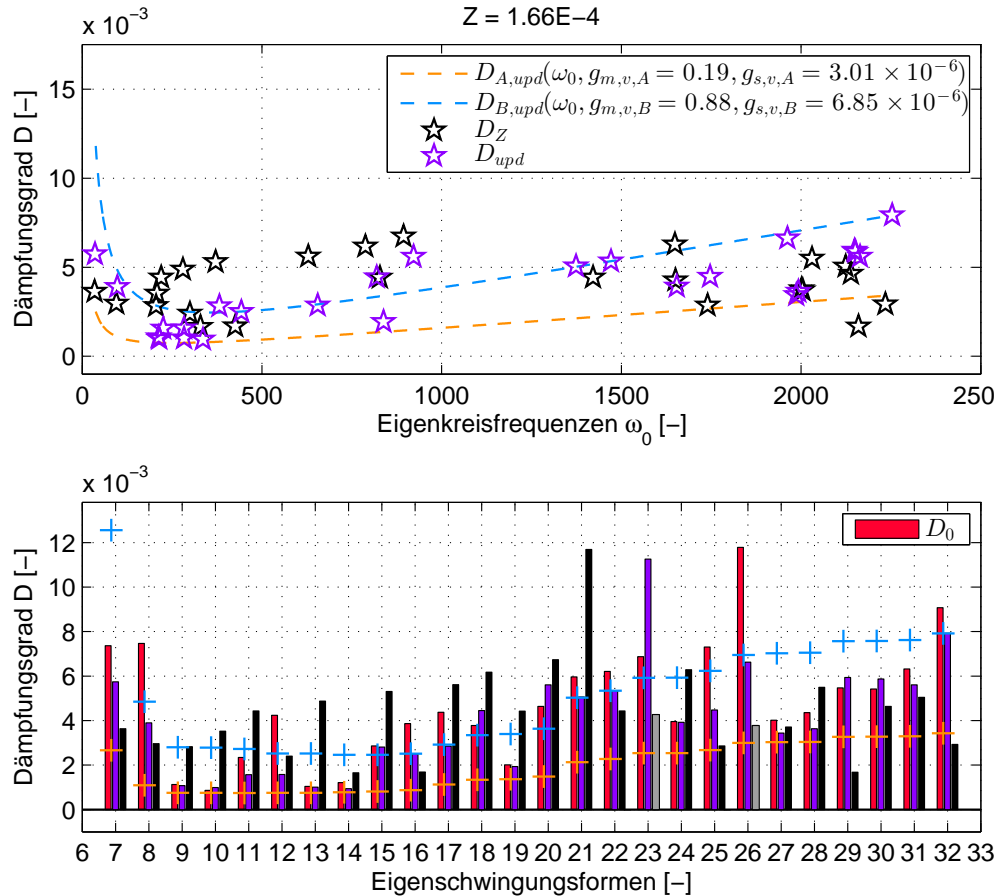
[Abb. 6.40](#) und [Abb. 6.41](#) zeigen die Ergebnisse der computergestützten Modellanpassung bei der unbehandelten Laborstruktur.

Sie zeigen jeweils im obersten Diagramm die Zusammenhänge zwischen Dämpfungsmaß und Eigenkreisfrequenz für die jeweilige Substruktur mit den veränderten Dämpfungsparametern in orange und blau, die angepassten globalen modalen Dämpfungsmaße  $D_{upd}$  in violett, die experimentell ermittelten globalen modalen Dämpfungsmaße  $D_Z$  in schwarz und im Titel den Wert des Zielfunktionalen  $Z$ . Sie zeigen im mittleren Diagramm die prinzipiell gleiche Information wie im obersten Diagramm, allerdings je elastischer Eigenform, unter Hinzunahme der Anfangsdämpfungsmaße in rot und mit grau markierten, schwach gewichteten Ziel-Dämpfungsmaßen.

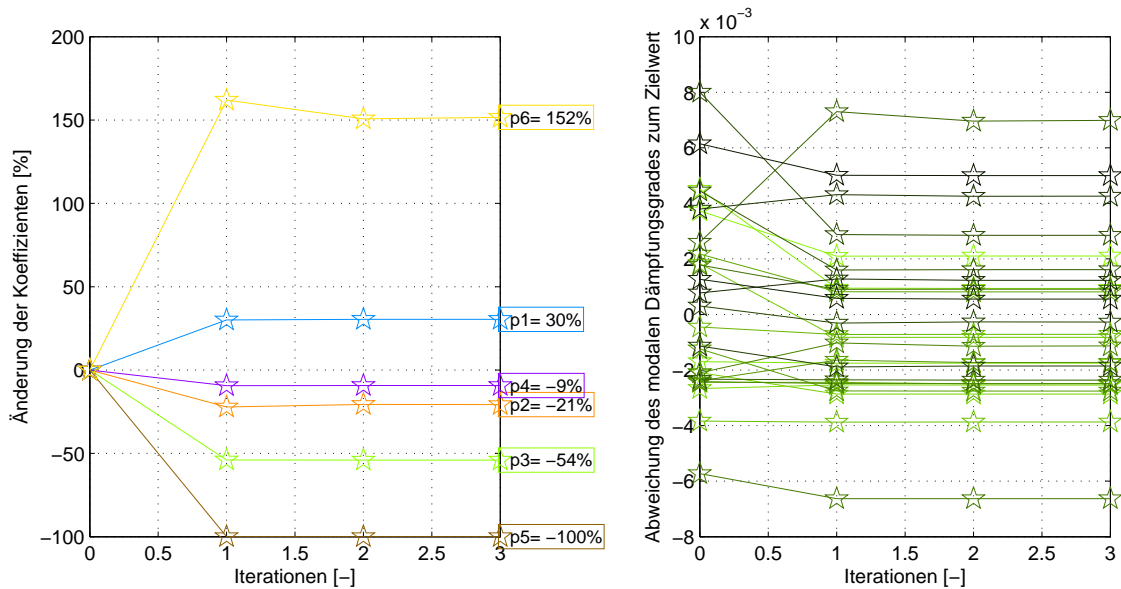
Die unteren Diagramme zeigen auf der linken Seite die Veränderung der Korrekturparameter, also der freigegebenen Verlustfaktoren  $g$ , gegenüber den Anfangswerten. Auf der rechten Seite ist die Abweichung der globalen modalen Dämpfungsmaße über die Iterationen dargestellt.

Beim Vergleich der ursprünglich berechneten Lösungen  $D_0$  in [Abb. 6.35](#) und den Anfangslösungen  $D_0$  in [Abb. 6.40](#) und [Abb. 6.41](#) ist zu beachten, dass einige modale Dämpfungsgrade der Anfangslösung aufgrund der vorhandenen Verlustfaktoren  $g_{s,s/v,F}$  für die Federelemente etwas gewachsen sind und so teils sogar oberhalb der Grenze der Dämpfung-Kreisfrequenz-Zusammenhangs liegen.

Bei der RAYLEIGH-Dämpfung zeigt [Abb. 6.40a](#), dass sich der Wert des Zielfunktionalen  $Z$  gegenüber der unangepassten Lösung in [Abb. 6.35](#) um etwa 18 % verringert hat, sodass mathematisch eine Verbesserung eingetreten ist. Tatsächlich zeigt das untere Diagramm der Abbildung, dass die Differenz der meisten modalen Dämpfungsmaße  $D$  gegenüber ihren Ziel-Dämpfungsmaßen  $D_Z$  leicht gesunken ist, während die Differenz bei den anderen konstant oder in wenigen Fällen sogar größer geworden ist. Sie zeigt aber keine deutlich sichtbare Verbesserung.



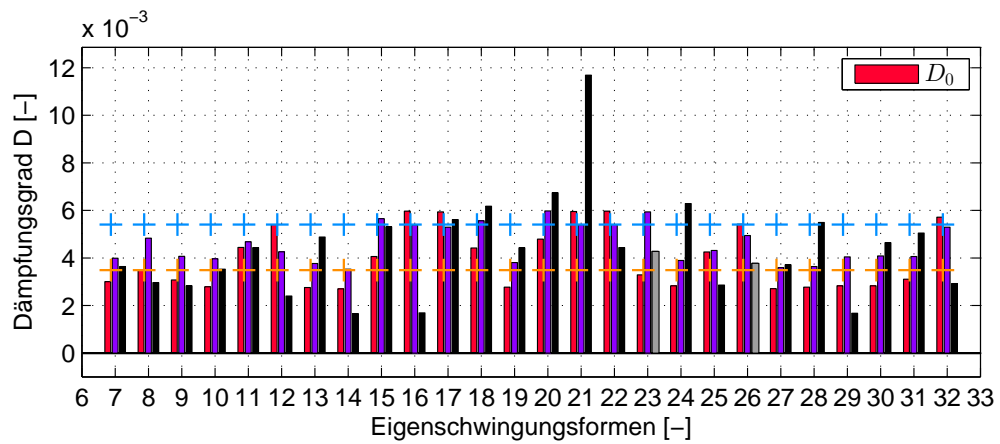
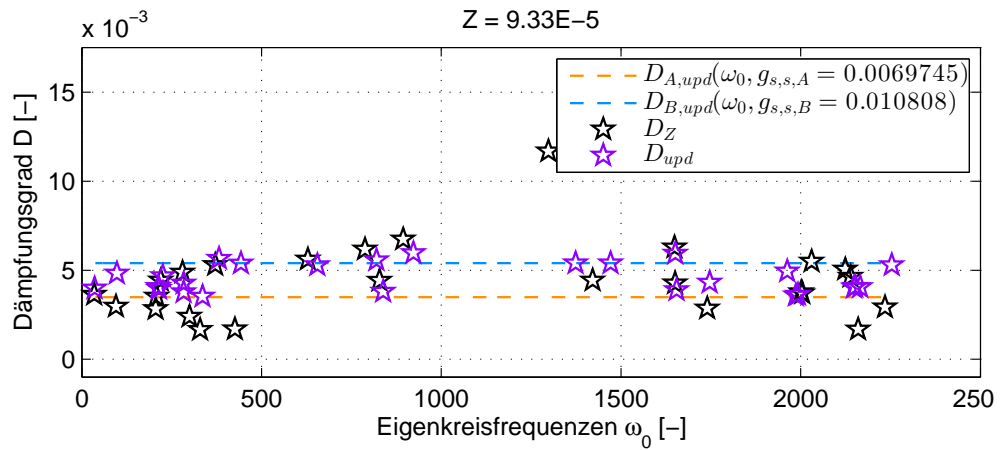
(a) Anfangs-, angepasste und Ziel-Dämpfungsmaße



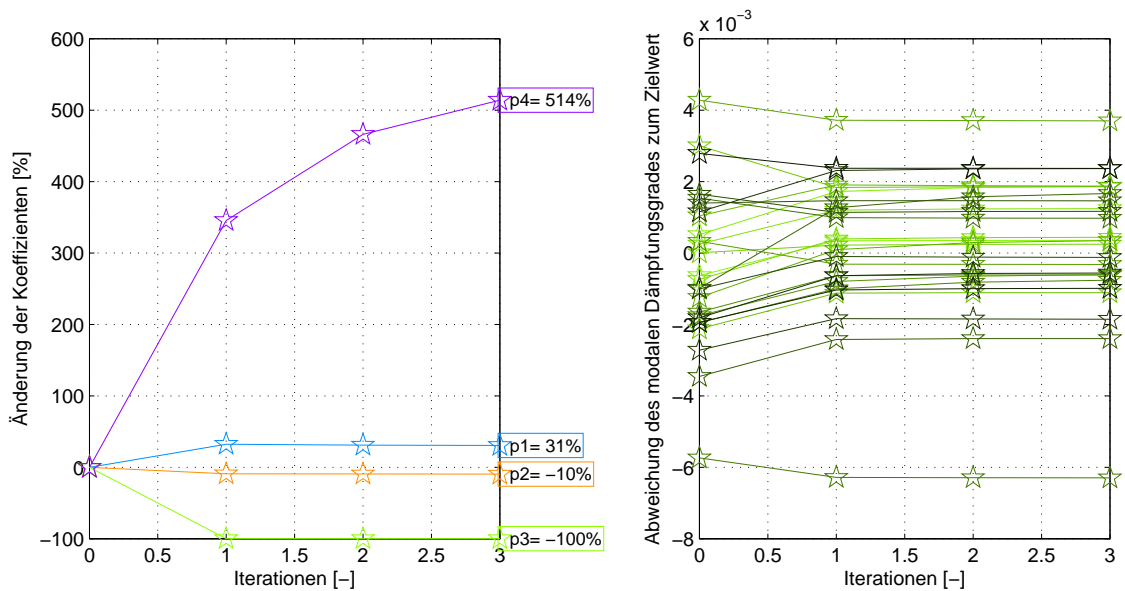
(b) Iterative Änderung der Verlustfaktoren und der globalen modalen Dämpfungsgrade

**Abbildung 6.40.:** Ergebnisse der computergestützten Modell Anpassung bei RAYLEIGH-Dämpfung, unbehandelte Laborstruktur





(a) Anfangs-, angepasste und Ziel-Dämpfungsmaße



(b) Iterative Änderung der Verlustfaktoren und der globalen modalen Dämpfungsgrade

**Abbildung 6.41.:** Ergebnisse der computergestützten Modelladaptation bei steifigkeitsproportionaler struktureller Dämpfung, unbehandelte Laborstruktur

Das rechte Diagramm in [Abb. 6.40b](#) bestätigt sichtbar, dass Verbesserungen im Allgemeinen klein sind.

Die Funktionalität der Wichtung zeigt sich besonders bei der starken Vergrößerung der Differenz bei der 23. Eigenform, dessen grau markierte, schlecht identifizierte modalen Eigenschaften sehr schwach gewichtet wurden.

[Abb. 6.40b](#) zeigt die Veränderung der Korrekturparameter  $p_1 = g_{m,v,A}$ ,  $p_2 = g_{s,v,A}$ ,  $p_3 = g_{m,v,B}$ ,  $p_4 = g_{s,v,B}$ ,  $p_5 = g_{s,v,Fxy}$  und  $p_6 = g_{s,v,Fz}$ . Sie zeigt eine sehr schwache Veränderung der Verlustfaktoren  $g_{s,v,A/B}$ , also  $p_{2/4}$ , sodass die ursprüngliche Abschätzung bereits sehr gut gewesen sein muss. Eine deutliche Veränderung von  $g_{m,v,A/B}$ , also  $p_{1/3}$ , ist erklärbar durch den iterativen Versuch, die großen Differenzen der Dämpfungsmaße der ersten zwei elastischen Eigenformen zu verringern, ohne die Differenzen der folgenden acht elastischen Eigenformen zu vergrößern.

$p_5 = g_{s,v,Fxy}$  sollte bereits bei der ersten Iteration einen unphysikalischen, negativen Wert annehmen und hat dabei den Wert der unteren Grenze  $g_{LL} = 0$  bekommen.  $p_6 = g_{s,v,Fz}$  ist dagegen stark gewachsen. Diese Diskrepanz gegenüber der allgemeinen Beobachtung, dass meist die Bewegung in der Ebene wegen Reibung stärker gedämpft als in der Normalen, ist wahrscheinlich auf das verwendete Rechenmodell für die Verbindungsstelle der Substrukturen zurückzuführen.

Bei der steifigkeitsproportionalen strukturellen Dämpfung zeigt [Abb. 6.41a](#), dass sich der Wert des Zielfunktional  $Z$  gegenüber der unangepassten Lösung in [Abb. 6.35](#) um etwa 21 % verringert hat, sodass auch hier mathematisch eine Verbesserung eingetreten ist. Die Verbesserung sind überwiegend sehr klein, aber sind bei der großen Mehrzahl der Eigenformen zu finden.

[Abb. 6.41b](#) zeigt die Veränderung der Korrekturparameter  $p_1 = g_{s,s,A}$ ,  $p_2 = g_{s,s,B}$ ,  $p_3 = g_{s,s,Fxy}$  und  $p_4 = g_{s,s,Fz}$ . Sie macht deutlich, dass die hochsensitiven Koeffizienten  $p_1 = g_{s,s,A}$  und  $p_2 = g_{s,s,B}$  wenig Veränderung für eine bessere Dämpfungsabbildung benötigen und auch hier die anfänglich gemachten Schätzungen bereits sehr gut waren. Für die Koeffizienten der Federelemente zeigt sie wie in [Abb. 6.40](#) eine Reduktion von  $p_3 = g_{s,s,Fxy}$  auf Null und einen vielfachen Anstieg von  $p_4 = g_{s,s,Fz}$ , was die gleiche Diskrepanz zur Realität deutlich macht.  $p_4 = g_{s,s,Fz}$  ist zudem zwar nicht ganz konvergiert, aber hat durch die letzte Änderung  $\Delta p_4$  keine genügend große Änderung des Zielfunktional  $Z$  mehr bewirkt.

Auch hier bestätigt das rechte Diagramm in [Abb. 6.41b](#), dass Verbesserungen klein sind.

Die Ergebnisse der computergestützten Modellanpassung bei der dämpfungsbehandelten Laborstruktur sind in Kap. A.15 in [Abb. A.23](#) und [Abb. A.24](#) dargestellt. Sie zeigen ebenfalls leichte mathematische Verbesserungen, die aber nur sehr schwach und kaum erkennbar sind.

### 6.6.3. Bewertung der Erprobung

Nach den ersten Anwendungserprobungen an simulierten Testdaten in Kap. 5.3.2 konnte die Funktionalität der computergestützten Anpassung der globalen modalen Dämpfungsgrade in leicht abgewandelter Form auch in Kap. 6.6.2 an realen, experimentell ermittelten Testdaten erfolgreich erprobt werden.

Die Anpassung hat für beide Dämpfungsmodelle Verbesserungen erzielt, die sehr schwach sind. Sie kann durch eine geeignetere Wahl einer Wichtungsmatrix  $[W_\varepsilon]$  sicherlich zu noch besseren Ergebnissen führen, ist aber durch die Dämpfungsmodellierung, dem verwendeten Rechenmodell und der natürlichen statistischen Varianz der experimentell identifizierten Dämpfungsmaße eingeschränkt.

Auffällig ist in allen Fällen, dass die Korrekturparameter nach der ersten Iteration keine bedeutsame Änderung mehr erfahren. Dies spricht für eine hohe Linearität in den Auswirkungen der Verlustfaktoren  $g$  auf die modalen Dämpfungsmaße.

Eine verlässliche Aussage der Modellanpassung, ob es sich bei den gefundenen Minima der Zielfunktion  $Z$  um lokale oder globale Minima handelt, ließe sich in einer weitergehenden Untersuchung durch mehrere iterative Modellanpassungsläufe bei unterschiedlichen Anfangswertgruppen treffen, wie es bspw. in [43] vorgestellt ist.



## 7. Zusammenfassung und Ausblick

### 7.1. Zusammenfassung

In dieser Abschlussarbeit wurde untersucht, wie vorhersagekräftig eine globale nichtproportionale Dämpfungsmodellierung, die auf der Kopplung individuell proportional gedämpfter Substrukturen basiert, bezüglich der Dämpfungseigenschaften einer Gesamtstruktur ist und in welchem Maße verschiedene Proportionaldämpfungsmodelle für eine computergestützte Anpassung der globalen Dämpfungsbeschreibung der Gesamtstruktur durch die Verlustfaktoren der Substrukturen anwendbar sind.

An der FE-modellierten Rechteckplatte in Kap. 5 wurde die Theorie der Parameteranpassung bei proportional mit RAYLEIGH-Dämpfung und steifigkeitsproportionaler struktureller Dämpfung versehenen, gekoppelten Substrukturen durchgeführt. Sie hat gezeigt, dass globale komplexe Eigenwerte der Gesamtstruktur sensitiv gegenüber den Verlustfaktoren der proportional gedämpften Substrukturen sind. Die Sensitivität konnte für eine Umsetzung einer computergestützten Anpassung komplexer Eigenwerte in MATLAB und zur Erprobung inkonsistenter und konsistenter Testfällen erfolgreich angewandt werden.

In Kap. 6.2 wurde ein reduziertes FE-Modell des AIRMOD einer Konvergenzstudie unterzogen, wobei ein nicht ausreichendes Konvergenzverhalten festgestellt wurde und das gesamte FE-Modell mit dreidimensionalen Elementen höherer Ordnung zur Minimierung des Diskretisierungsfehlers neu elementiert wurde.

In Kap. 6.3 wurden die modalen Eigenschaften der realen Laborstruktur und ihrer Substrukturen Flügel und Rumpf-Leitwerk mittels umfangreicher Hammertests bis 400 Hz bestimmt. Ein erster Datensatz bestand aus den modalen Eigenschaften für die frei-frei aufgehängte Laborstruktur sowie die Substrukturen in eingespannter Testumgebung. Er wies eine hohe Qualität trotz praktischer Probleme mit der Einspannung und der hohen modalen Dichte der geringgewichtigen symmetrischen Flügel-Substruktur auf. Ein zweiter Datensatz konnte durch die Installation einer dämpfungserzeugenden Schicht am Flügel gewonnen werden und wies eine ausreichende Qualität auf, um Analysen mit dem ersten Datensatz in nachfolgenden Schritten gegen zu prüfen.

Nach einer manuellen Anpassung der FE-Modelle an die Testumgebungen der Modaltests wurden die experimentell ermittelten modalen Eigenschaften aus den Datensätze mit den numerisch errechneten modalen Eigenschaften der zugehörigen FE-Modelle in Kap. 6.4 aufwändig verglichen. Dadurch konnte festgelegt werden, welche experimentell ermittelten modalen

Eigenschaften ausreichend gut durch die FE-Modelle repräsentiert werden und für eine Dämpfungsmodellierung verwendet werden dürfen.

In Kap. 6.5 wurden mittels der Substruktur-FE-Matrizen, der experimentell identifizierten modalen Dämpfungsmaße und abgeschätzter Verlustfaktoren die proportionalen Dämpfungsmatrizen für alle vier Proportionaldämpfungsmodellierungen berechnet, zu einer nichtproportionalen Gesamtsystem-Dämpfungsmatrix gekoppelt und zur numerischen Bestimmung der modalen Eigenschaften durch Lösung des Eigenwertproblems des gedämpften Gesamtsystems verwendet.

Dabei hat sich gezeigt, dass steifigkeitsproportionale strukturelle Dämpfung je Substruktur die Dämpfungseigenschaften der Gesamtstruktur am besten abbilden kann. RAYLEIGH-Dämpfung kann die Dämpfung der Gesamtstruktur nicht gut abbilden, weil die Dämpfung bei keiner der Substrukturen eine entsprechende Frequenzabhängigkeit aufweist. Die modalen Dämpfungsmodellierungen konnten keine abschließenden Ergebnisse erzeugen, da selbst bei modaler Kondensation das Eigenwertproblem nicht fehlerlos gelöst werden konnte. Die Substruktur-Dämpfungsmatrizen mussten zudem physikalisch so je Substruktur errechnet und in die Gesamtsystem-Dämpfungsmatrix eingeordnet werden, dass keine Dämpfungskopplung der Substrukturen beim Gesamtsystem bestand und sich beide Modellierungen äquivalent verhalten haben. In den nachvollziehbaren Fällen konnten die modalen Dämpfungsmodelle die Dämpfung des Gesamtsystems nicht besser als die bereits genannten Dämpfungsmodellierungen beschreiben.

Zuletzt wurden in Kap. 6.6 Verlustfaktoren für eine computergestützte Anpassung durch eine Betrachtung der Sensitivität ausgewählt. Die in MATLAB programmierte Sensitivitätsmethode zur computergestützten Modellanpassung wurde aufgrund stark komplexer Residuen so abgeändert, dass explizit die Differenz analytisch berechneter, globaler modaler Dämpfungsmaße zu den experimentell identifizierten Dämpfungsmaßen der Gesamtstruktur minimiert wird. Dieses Verfahren wurde für die realen Testdaten bei proportional mit RAYLEIGH-Dämpfung und steifigkeitsproportionaler struktureller Dämpfung versehenen Substrukturen des AIRMOD erfolgreich durchgeführt und konnte die Dämpfungsbeschreibung der Gesamtstruktur noch einmal leicht verbessern.

## 7.2. Ausblick

Mit der Untersuchung dieser Abschlussarbeit konnte die sehr gute Dämpfungsbeschreibung und hohe Einsatzfähigkeit steifigkeitsproportionaler struktureller Dämpfung bestätigt werden. Sie ermöglichen einen zukünftigen Einsatz dieser Dämpfungsmodellierung in einer computergestützten Modellanpassung der Dämpfungsbeschreibung eines komplexen Gesamtsystems, bspw. im Nachgang einer Modellanpassung steifigkeits- und massensensitiver Parameter und in Verbindung mit MSC.NASTRAN.

Untersuchungen zur Dämpfungsmodellierung mittels modaler Modelle sollte für eindeutige Ergebnisse bei einem fest verspannten Gesamtsystem mit einem explizit koppelnden FE-Modell fortgeführt werden, um unterschiedliches Dämpfungsverhalten der modalen Modelle erzeugen zu können und Probleme durch schlecht konditionierte Matrizen bei niedrigfrequenten Starr-

körpereigenformen zu vermeiden.

Weiterführende Untersuchungen könnten die hier untersuchten globalen mit der in [40] untersuchten lokalen Dämpfungsmodellierung verbinden.

Bezüglich globaler Modellierungen könnten weiterführende Untersuchungen die Vorhersagekraft der Dämpfungsbeschreibung bei Substrukturen mit unterschiedlichen, rein viskosen oder rein strukturellen Dämpfungsmodellierungen oder mit gemischter Anwendung, bspw. mithilfe schneller iterativer Verfahren zur Eigenwertbestimmung wie in [7], betrachten.





# Literaturverzeichnis

- [1] ADHIKARI, S.: Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors in Damped Dynamic Systems. In: *AIAA Journal* 39 (1999), November, Nr. 11, S. 1452–1457
- [2] ADHIKARI, S.: *Structural Dynamic Analysis with Generalized Damping Models: Analysis*. Wiley-ISTE, 2014
- [3] AGILENT TECHNOLOGIES (Hrsg.): *Fundamentals of Modal Testing: Application Note 243-3*. Santa Clara, USA: Agilent Technologies, 2000
- [4] ALBUS, J. ; BEUCHEL, W. ; DIEKER, S.: A Consistent Approach of Damping Treatment in Coupled Dynamic Analysis and Test. In: *Proceedings of the 62nd International Astronautical Congress* Bd. 7 International Astronautical Federation, 2011, S. 5430–5443
- [5] BATHE, K.-J.: *Finite Element Procedures*. New Jersey : Prentice-Hall, Inc., 1996
- [6] BISMARCK-NASR, M. N. ; PRZEMIENIECKI, J. S. (Hrsg.): *Structural Dynamics in Aeronautical Engineering*. Reston, Virginia, USA : American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 1999 (AIAA Education Series)
- [7] BOBILLOT, A. ; BALMÈS, E.: Iterative Techniques for Eigenvalue Solutions of damped structures coupled with fluids. In: *Proceedings of the 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, 2002
- [8] BOGRAD, S. ; SCHMIDT, A. ; GAUL, L.: Joint Damping Prediction by thin layer elements. In: *Proceedings of the 26th International Modal Analysis Conference* Bd. 3 Society for Experimental Mechanics, 2008, S. 1567–1576
- [9] BROCH, J. T.: *Mechanical Shock and Vibration Testing*. 2. Naerum, Dänemark: Brüel & Kjaer, April 1984
- [10] CLOUGH, R. W. ; PENZIEN, J.: *Dynamics of Structures*. 3rd Edition. McGraw-Hill International Editions, 1995 (Civil Engineering Series)
- [11] DELPRETE, C. ; ROSSO, C.: Orthogonal Maximum Sequence Sensor Placements Algorithms for modal test, expansion and visibility. In: *Proceedings of the 23rd International Modal Analysis Conference* Bd. 3 Society for Experimental Mechanics, 2005, S. 1568–

1577

- [12] EWINS, D. J. ; ROBERTS, J. B. (Hrsg.): *Modal Testing - Theory, Practice and Application*. 2. Baldock, England : Research Studies Press Ltd., 2000 (Engineering Dynamics)
- [13] FLADUNG, W. A. ; ROST, R. W.: Cause and Effect of Applying the Exponential Window to an Impact Force Signal. In: *Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference* Society for Experimental Mechanics, 1996, S. 1553–1559
- [14] FOX, R. L. ; KAPOOR, M. P.: Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors. In: *AIAA Journal* 6 (1968), Nr. 12, S. 2426–2429
- [15] FÖRSCHING, H. W.: *Grundlagen der Aeroelastik*. Springer Verlag, 1974
- [16] GASCH, R. ; KNOTHE, K. ; LIEBICH, R.: *Strukturdynamik*. Bd. 2. Berlin : Springer Verlag, 2012
- [17] GOVERS, Y.: *Parameter Identification of Structural Dynamic Models by Inverse Statistical Analysis*. Göttingen, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V., Forschungsbericht, 2012
- [18] GRAVELLE, A.: Ground Vibration Test Techniques / Group for Aeronautical Research and Technology in Europe. 1999 (1). – Forschungsbericht
- [19] GUILLAUME, P. ; VERBOVEN, P. ; VANLANDUIT, S. ; AUWERAER, H. Van d. ; B., Peeters: A Poly-Reference Implementation of the Least-Squares Complex Frequency-Domain Estimator. In: *Proceedings of the 21st International Modal Analysis Conference*. Kissimmee, USA, Februar 2003, S. 183–192
- [20] HABERHAUER, H. ; BODENSTEIN, F.: *Maschinenelemente*. 14. Springer Verlag, 2007
- [21] HATCH, C. u. a.: Methods for Refinement of Structural Finite Element Models: Summary of the GARTEUR AG14 Collaborative Programme. In: *Proceedings of the 32nd European Rotorcraft Forum*. Maastricht, Niederlande, 2006
- [22] HEYLEN, W. ; LAMMENS, S. ; SAS, P.: *Modal Analysis, Theory and Testing*. Katholieke Universiteit Leuven, 2007
- [23] HIGHAM, N. ; MACKEY, D. ; TISSEUR, F. ; GARVEY, S.: Scaling, Sensitivity and Stability in the Numerical Solution of Quadratic Eigenvalue Problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 73 (2008), Nr. 3, S. 344–360
- [24] HODGES, D. H. ; PIERCE, G. A.: *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity*. Cambridge University Press, 2002
- [25] IRRETIER, H.: *Experimentelle Modalanalyse*. Bd. 1. Universität Gesamthochschule Kas-

sel, 2000

- [26] KISTLER INSTRUMENTE AG (Hrsg.): *Kistler Impulse Force Hammers Types 9722A(X), 9724A(X), 9726A(X), 9728A20000 And Accessories*. Amherst, USA: Kistler Instrumente AG, 2005
- [27] KUHLE, D. ; MESCHKE, G.: *Vorlesung Grundlagen der Finite-Elemente-Methode*. Ruhr-Universität Bochum, 2004
- [28] MCLEAN, D. M.: *MD NASTRAN Linear Static Analysis User's Guide*. Santa Ana, Kalifornien, USA: MSC.Software Corporation, Juni 2010
- [29] MOTTERSHEAD, J. E. ; FRISWELL, M. I.: Model Updating in Structural Dynamics. In: *Journal of Sound and Vibration* 167 (1993), Nr. 2, S. 347–375
- [30] MOTTERSHEAD, J. E. ; LINK, M. ; FRISWELL, M. I.: The Sensitivity Method in Finite Element Model Updating: A Tutorial. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 25 (2011), Oktober, Nr. 7, S. 2275–2296
- [31] NATKE, H. G.: *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse: Identifikation schwingungsfähiger elastomechanischer Systeme*. 2. Braunschweig/Wiesbaden : Vieweg, 1988
- [32] NIEMANN, G. ; WINTER, H. ; HÖHN, B.-R.: *Maschinenelemente*. Bd. 1. 14. Springer Verlag, 2005
- [33] PCB PIEZOTRONICS, INC. (Hrsg.): *High Sensitivity, Miniature, Ceramic Shear Piezoelectronic Sensors Model M352C65*. New York, USA: PCB Piezotronics, Inc., 2002
- [34] PEETERS, B. ; GUILLAUME, P. ; AUWERAER, H. Van d. ; CAUBERGHE, B. ; VERBOVEN, P. ; LEURIDAN, J.: Automotive and aerospace applications of the PolyMAX modal parameter estimation method. In: *Proceedings of the 22nd International Modal Analysis Conference* Bd. 1. Dearborn, USA, Januar 2004, S. 38–48
- [35] POTTER, R. ; RICHARDSON, M. H.: Identification of the Modal Properties of an Elastic Structure from Measured Transfer Function Data. In: *Proceedings of the 20th International Instrumentation Symposium*. Albuquerque, USA, Mai 1974, S. 239–246
- [36] RICHARDSON, M. H.: Modal Mass, Stiffness and Damping / Vibrant Technology, Inc. Jamestown, USA, Januar 2000 (31). – Forschungsbericht
- [37] RITTWEGGER, A. ; DIEKER, S. ; ABDOLY, K. ; ALBUS, J.: Coupled Dynamic Load Analysis with different Component Damping of the Substructures. In: *Proceedings of the 59th International Astronautical Congress* Bd. 8 International Astronautical Federation, 2008, S. 5386–5398

- [38] RUTMAN, A. ; BALES-KOGAN, J.: Multi-Spring Representation of Fasteners for MSC/NASTRAN Modeling. In: *Proceedings of the MSC Aerospace Users' Conference*, 1997
- [39] SCHEDLINSKI, C. ; DUFOUR, K.-H. ; PAYSAN, G.: Anwendung einer Strategie zur Validierung komplexer Finite-Elemente-Modelle auf das Gesamtmodell eines modernen Flugzeugtriebwerks. In: *VDI-Tagung Schwingungsanalyse und Identifikation*, 2010
- [40] SCHMIDT, A. ; AL-TAMEEMI, H. ; BOGRAD, S. ; GAUL., L.: Integration of Damping Properties of Assembled Structures into the Finite Element Method Using Thin-Layer Elements and the Model of Constant Hysteresis. In: *Proceedings of the International Conference on Structural Engineering Dynamics*. Tavira, Portugal, Juni 2011
- [41] STELZMANN, U. ; GROTH, C. ; MÜLLER, G.: *FEM für Praktiker: Strukturdynamik*. Renningen : expert verlag, 2006
- [42] SUN, E. Q.: Shear Locking and Hourglassing in MSC Nastran, ABAQUS, and ANSYS. In: *Proceedings of the MSC Software Corporation's Americas Virtual Product Development Conference*. Huntington Beach, California, July 2006
- [43] TEUGHEL, A. ; DE ROECK, G. ; SUYKENS, J.: Global optimization in FEM updating by coupled local minimizers. In: *Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering* Bd. 3. Leuven, Belgien, September 2002, S. 985–994
- [44] TRETHEWEY, M. W. ; CAPEO, J. A.: Tutorial: Signal Processing Aspects of Structural Impact Testing. In: *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis* 7 (1992), April, Nr. 2, S. 129–149
- [45] VENTSEL, E. ; KRAUTHAMMER, T.: *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Application*. Marcel Dekker, Inc., 2001
- [46] WITTEL, F. K.: *Eine kurze Einführung in die Finite Element Methode*. ETH Zürich, Institut für Baustoffe, 2010
- [47] ZIAEI, S.: Finite Element, Modal Testing and Modal Analysis of a Radial Flow Impeller. In: *Iranian Journal of Science & Technology, Transaction B, Engineering* 29 (2005), Nr. B2

# A. Anhang

## A.1. Rücktransformation der generalisierten viskosen Dämpfungsmatrix in eine physikalische Matrix

Verwendet man die Massenorthogonalitätsrelation für diskrete Systeme aus Gl. (2.64), gilt allgemein

$$[I] = [M]_{gen}^{-1} [M]_{gen} = [\Phi]^{-1} [\Phi] \quad (A.1)$$

Ersetzt man  $[M]_{gen}$  durch die Massenorthogonalitätsrelation in Gl. (2.64), ergibt sich

$$[I] = \underbrace{[M]_{gen}^{-1} [\Phi]^T [M] [\Phi]}_{\equiv [\Phi]^{-1}} \quad (A.2)$$

und mittels eines Koeffizientenvergleiches mit Gl. (A.1)

$$\begin{aligned} [\Phi]^{-1} &= [M]_{gen}^{-1} [\Phi]^T [M] \\ ([\Phi]^T)^{-1} &= [M] [\Phi] [M]_{gen}^{-1} \end{aligned} \quad (A.3)$$

Eingesetzt in Gl. (2.50) ergibt sich

$$[D] = ([M] [\Phi] [M]_{gen}^{-1}) [D]_{gen} ([M]_{gen}^{-1} [\Phi]^T [M]) \quad (A.4)$$

$[M]_{gen}^{-1}$  und  $[D]_{gen}$  sind Matrizen in Diagonalform, sodass man den Ausdruck

$$[M]_{gen}^{-1} [D]_{gen} [M]_{gen}^{-1} = [\tilde{D}] = \begin{bmatrix} \tilde{d}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{d}_2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{d}_h \end{bmatrix} \quad (A.5)$$

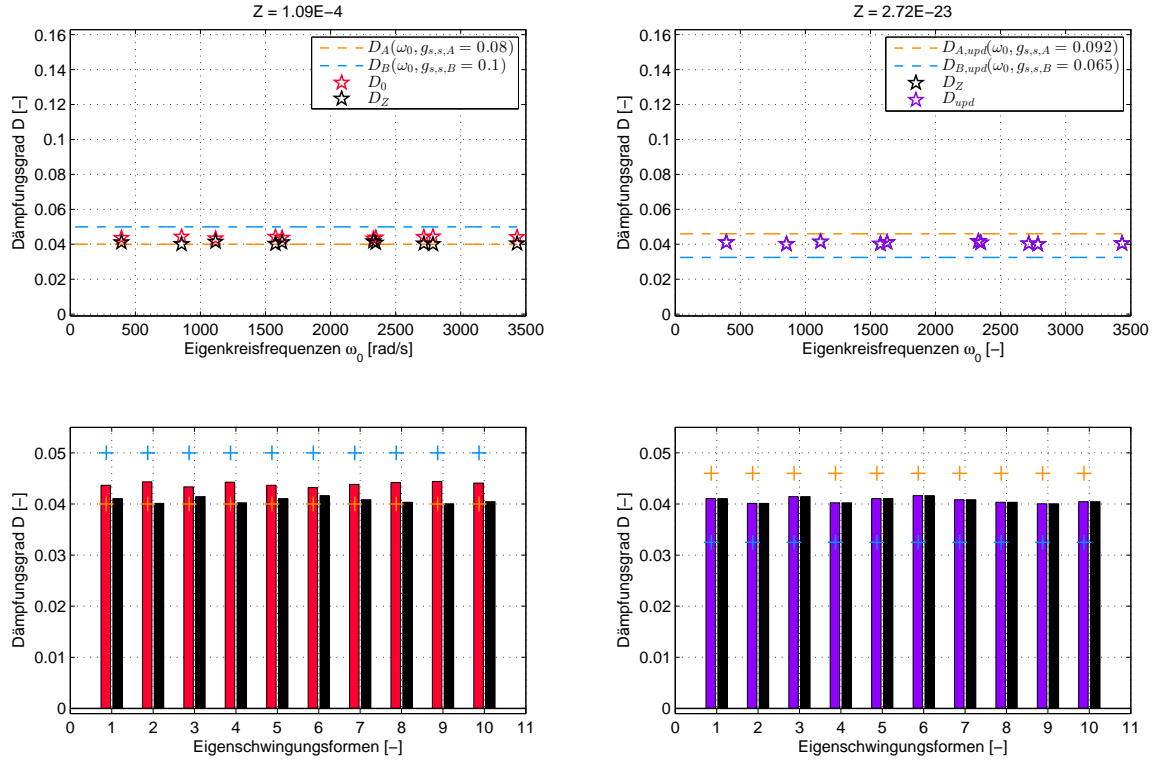
mit  $\tilde{d}_h = \frac{2D_{gen,h}\omega_{0,h}}{m_{gen,h}}$  vereinfachen kann. Man kann also statt Gl. (A.4) schreiben

$$[D] = [M] [\Phi] [\tilde{D}] [\Phi]^T [M] \quad (A.6)$$

Jeder h-te modale Dämpfungsgrad  $D_{gen,h}$  bringt einen eigenen Anteil  $[D]_h \in \mathbb{R}^{m \times m}$  in die Gesamtdämpfungsmatrix  $[D]$  ein.

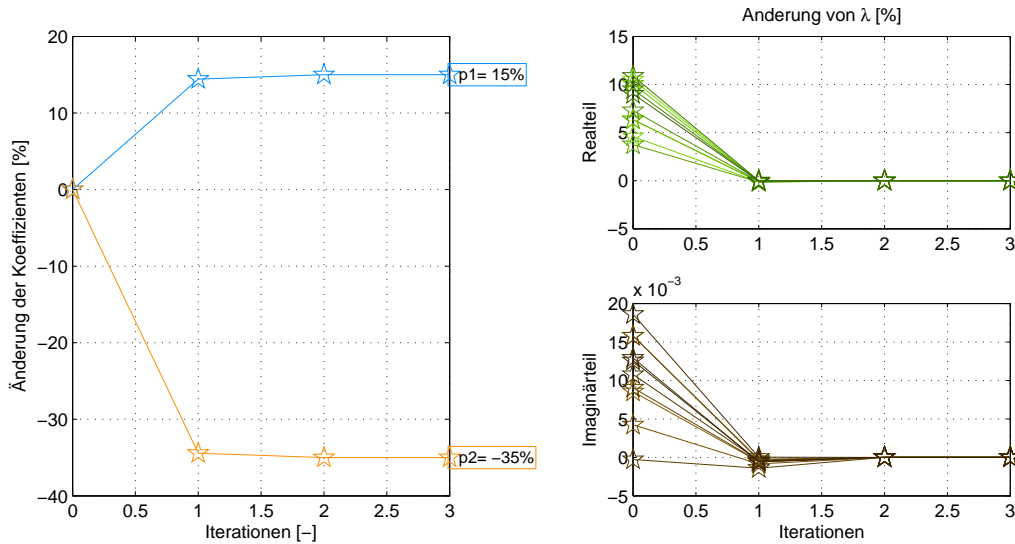
$$\begin{aligned} [D] &= \sum_1^h [D]_h = [M] \left( \sum_1^h \{\phi_h\} \tilde{d}_h \{\phi_h\}^T \right) [M] \\ &= [M] \left( \sum_1^h \frac{2D_{gen,h}\omega_{0,h}}{m_{gen,h}} \{\phi_h\} \{\phi_h\}^T \right) [M] \end{aligned} \quad (A.7)$$

## A.2. Computergestützte Modellanpassung der globalen modalen Dämpfungsmaße einer Platte



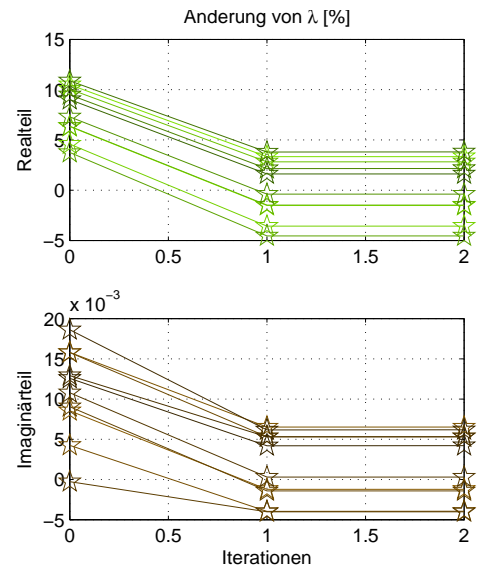
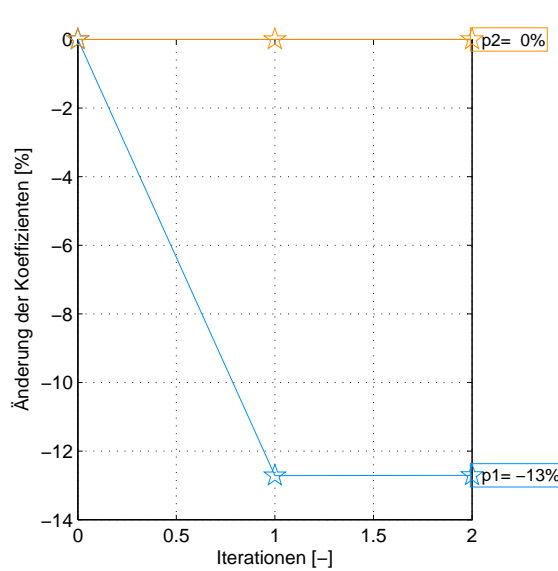
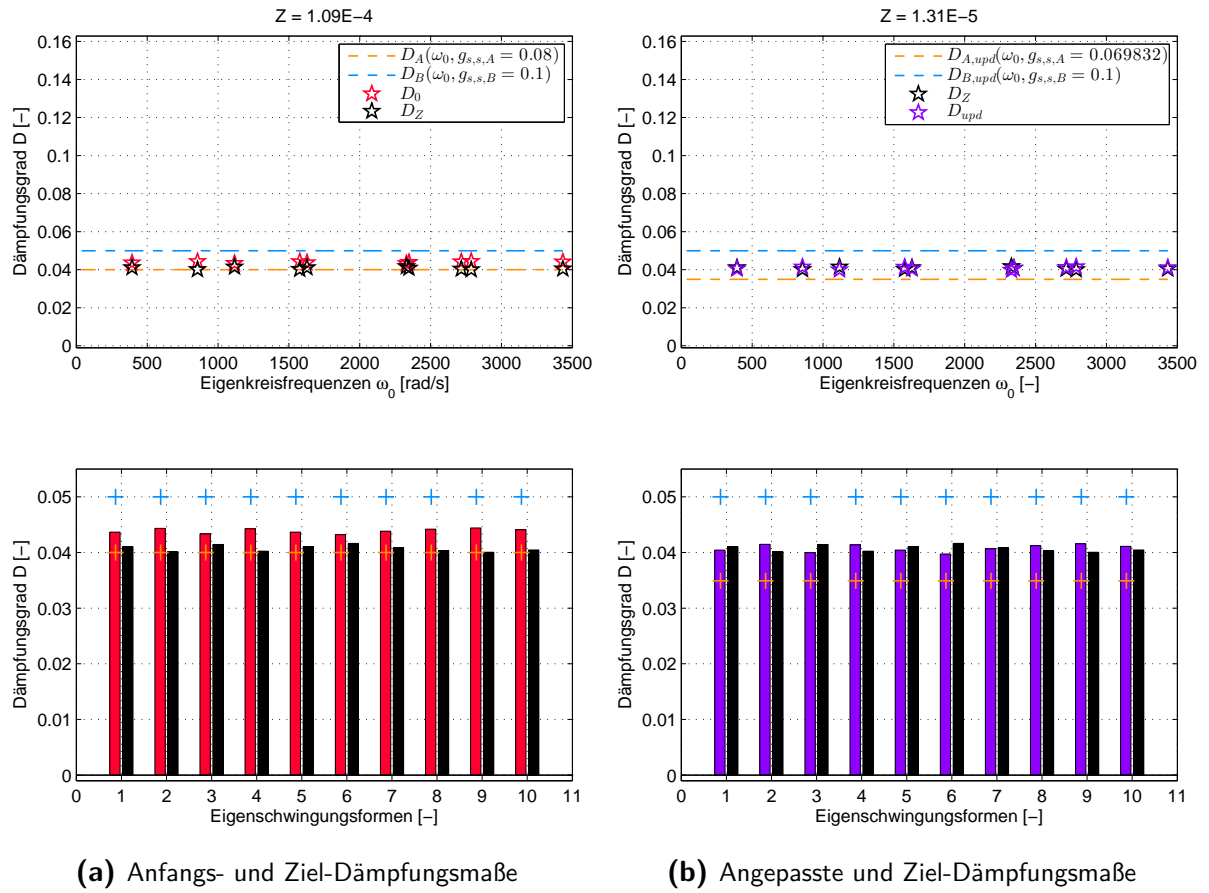
(a) Anfangs- und Ziel-Dämpfungsmaße

(b) Angepasste und Ziel-Dämpfungsmaße



(c) Veränderung der Verlustfaktoren  $g$  und Verlauf der Eigenwertfehler  $\lambda$

**Abbildung A.1.:** Computergestützte Modellanpassung komplexer Eigenwerte der Platte bei steifigkeitsproportionaler struktureller Dämpfung, konsistenter Fall

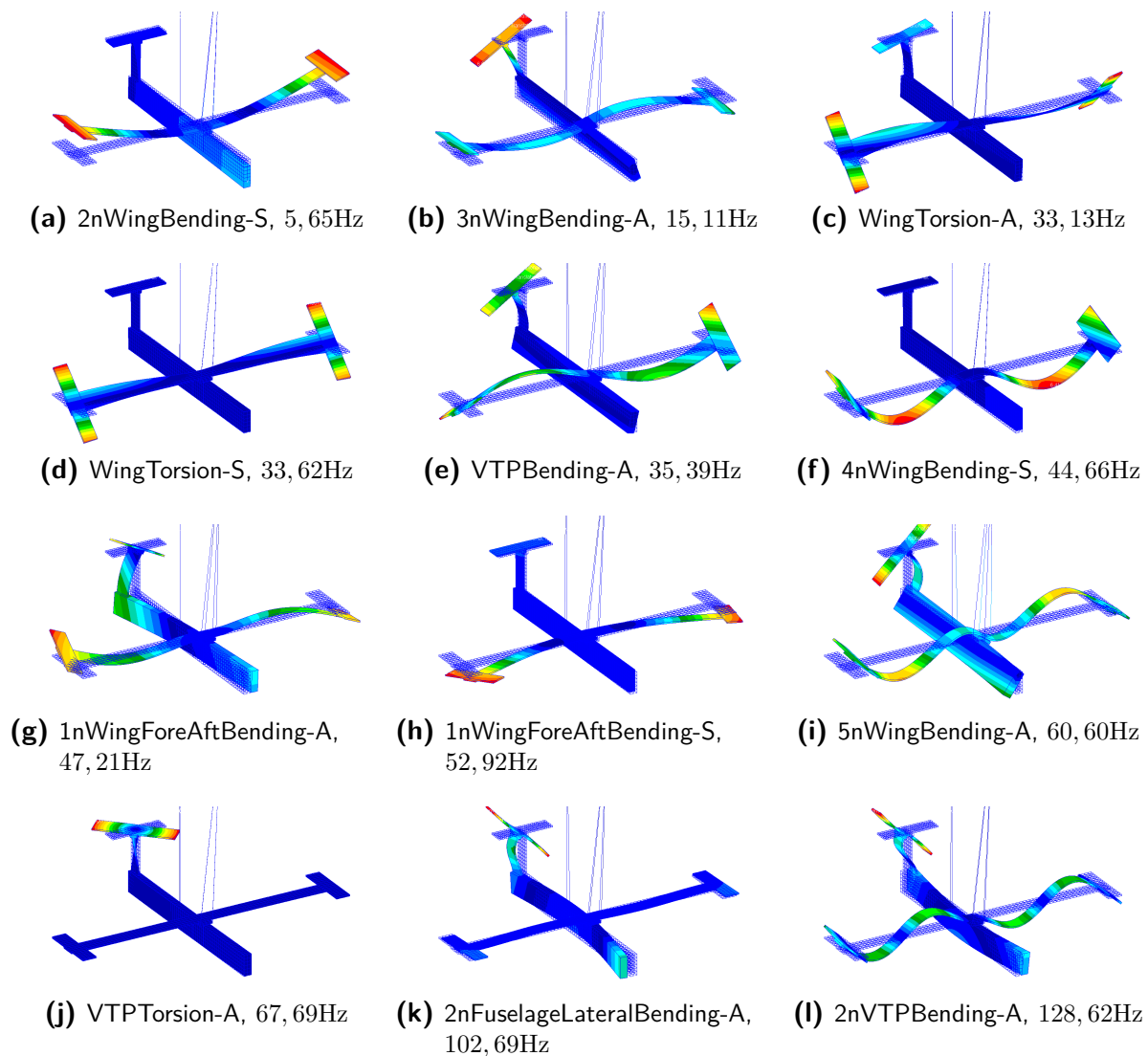


**(c) Veränderung der Verlustfaktoren  $g$  und Verlauf der Eigenwertfehlers  $\lambda$**

**Abbildung A.2.:** Computergestützte Modelladaptation komplexer Eigenwerte der Platte bei steifigkeitsproportionaler struktureller Dämpfung, inkonsistenter Fall

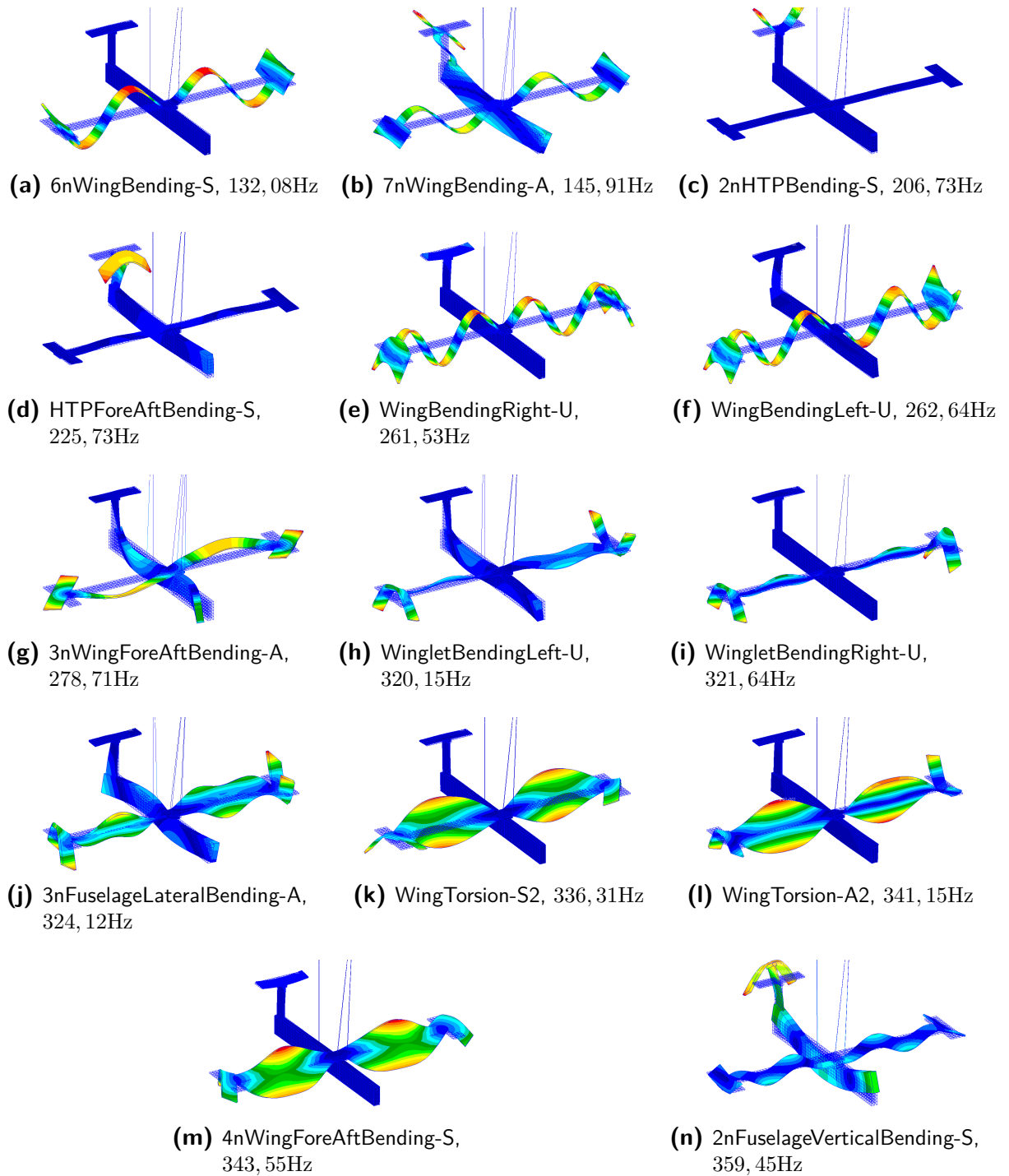
### A.3. Eigenformen des anfänglichen FE-Modells der Laborstruktur

Im Folgenden werden die Eigenformen des anfänglich zur Verfügung gestellten FE-Modells der Laborstruktur AIRMOD dargestellt, da sie Grundlage für eine erste Einschätzung der dominanten Strukturteile ist.



**Abbildung A.3.:** Elastische Eigenformen des anfänglich zur Verfügung gestellten FE-Modells, mit Eigenfrequenzen  $f_0$  zwischen 5 und 130 Hz





**Abbildung A.4.:** Elastische Eigenformen des anfänglich zur Verfügung gestellten FE-Modells, mit Eigenfrequenzen  $f_0$  zwischen 130 und 400 Hz

## A.4. Sensorplan

Im Folgenden wird die Platzierung aller verwendeter Sensoren an der Gesamtstruktur aufgelistet. Das kartesische Koordinatensystem aus Abb. 6.1b wird benutzt.

**Tabelle A.1.:** Sensorplan

Nr.	Abschnitt-Kennung	Sensor-Kennung	X [m]	Y [m]	Z [m]	Richtung
1,00	WING-R	010101	0,55	0,22	0,17	+Z
2,00	WING-R	010201	0,55	0,30	0,17	+Z
3,00	WING-R	010202	0,65	0,30	0,17	+Z
4,00	WING-R	010301	0,55	0,48	0,17	+Z
5,00	WING-R	010302	0,65	0,48	0,17	+Z
6,00	WING-R	010401	0,55	0,60	0,17	+X
7,00	WING-R	010402	0,55	0,60	0,17	+Z
8,00	WING-R	010403	0,65	0,60	0,17	+Z
9,00	WING-R	010501	0,55	0,82	0,17	+Z
10,00	WING-L	020101	0,55	-0,22	0,17	+Z
11,00	WING-L	020201	0,55	-0,30	0,17	+Z
12,00	WING-L	020202	0,65	-0,30	0,17	+Z
13,00	WING-L	020301	0,55	-0,48	0,17	+Z
14,00	WING-L	020302	0,65	-0,48	0,17	+Z
15,00	WING-L	020401	0,55	-0,60	0,17	+X
16,00	WING-L	020402	0,55	-0,60	0,17	+Z
17,00	WING-L	020403	0,65	-0,60	0,17	+Z
18,00	WING-L	020501	0,55	-0,82	0,17	+Z
19,00	WLET-R	030101	0,80	0,90	0,18	+Y
20,00	WLET-R	030201	0,40	1,00	0,18	+X
21,00	WLET-R	030202	0,40	1,00	0,19	-Z
22,00	WLET-R	030203	0,55	1,00	0,19	-Z
23,00	WLET-R	030204	0,65	1,00	0,19	-Z
24,00	WLET-R	030205	0,80	1,00	0,19	-Z
25,00	WLET-L	040101	0,80	-0,90	0,18	-Y
26,00	WLET-L	040201	0,40	-1,00	0,18	+X
27,00	WLET-L	040202	0,40	-1,00	0,19	-Z
28,00	WLET-L	040203	0,55	-1,00	0,19	-Z
29,00	WLET-L	040204	0,65	-1,00	0,19	-Z
30,00	WLET-L	040205	0,80	-1,00	0,19	-Z
31,00	FUSE	050001	0,00	-0,03	0,00	+Y
32,00	FUSE	050002	0,00	0,00	0,07	+X
33,00	FUSE	050003	0,00	-0,03	0,15	+Y
34,00	FUSE	050004	0,00	0,00	0,15	-Z
35,00	FUSE	050005	0,48	-0,03	0,00	+Y
36,00	FUSE	050006	0,48	-0,03	0,15	+Y
37,00	FUSE	050007	0,55	0,00	0,18	-Z

38,00	FUSE	050008	0,65	0,00	0,18	-Z
39,00	FUSE	050009	1,05	-0,03	0,00	+Y
40,00	FUSE	050010	1,05	-0,03	0,15	+Y
41,00	FUSE	050011	1,45	-0,03	0,00	+Y
42,00	FUSE	050012	1,45	-0,03	0,15	+Y
43,00	VTP	060001	1,45	-0,01	0,30	+Y
44,00	VTP	060002	1,45	-0,02	0,45	+Y
45,00	VTP	060003	1,40	0,00	0,46	+X
46,00	VTP	060004	1,40	0,00	0,46	-Z
47,00	HTP-R	070101	1,40	0,20	0,46	+X
48,00	HTP-R	070102	1,40	0,20	0,46	-Z
49,00	HTP-L	080101	1,40	-0,20	0,46	+X
50,00	HTP-L	080102	1,40	-0,20	0,46	-Z

## A.5. Erregerpunkte

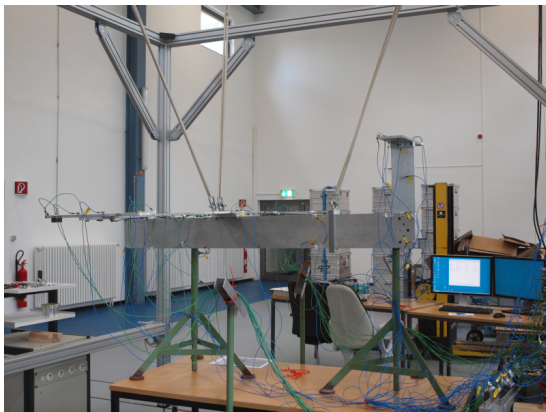
Im Folgenden werden die genauen Erregerpunkte aufgelistet. Sie stimmen mit dem Ort jeweils eines Sensors, dessen Kennung mit aufgelistet ist, überein. Das kartesische Koordinatensystem aus [Abb. 6.1b](#) wird benutzt. Der Ursprung des Koordinatensystems befindet sich in der Mitte der unteren Kante der Rumpfspitze.

**Tabelle A.2.:** Erregerpunkte

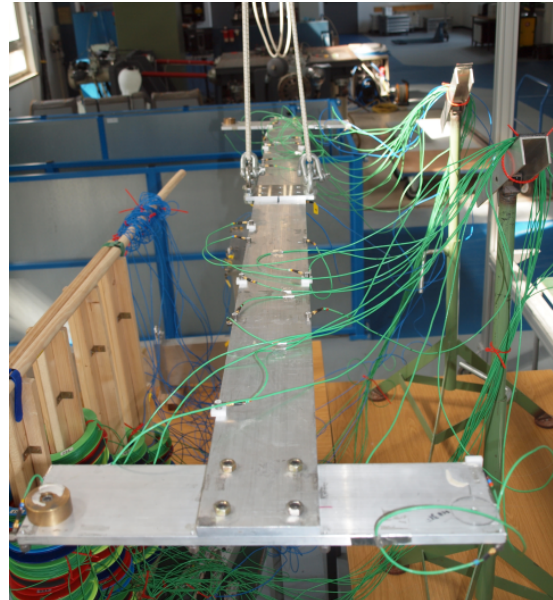
Erregerpunkt- Kennung	Struktur- Kennung	Abschnitt- Kennung	Sensor- Kennung	X [m]	Y [m]	Z [m]	Richtung
H01	C0	WLET-R	030202	0,40	1,00	0,19	-Z
H02	C0	FUSE	050008	0,65	0,00	0,18	-Z
H03	C0	FUSE	050002	0,00	0,00	0,07	+X
H04	C0	FUSE	050011	1,45	-0,03	0,00	+Y
H05	C0	WLET-L	040202	0,40	-1,00	0,19	-Z
H11	C1	WLET-L	040202	0,40	-1,00	0,19	-Z
H12	C1	WLET-R	030202	0,40	1,00	0,19	-Z
H13	C1	FUSE	050008	0,65	0,00	0,18	-Z
H14	C1	WLET-R	030201	0,40	1,00	0,18	+X
H21	C2	FUSE	050011	1,45	-0,03	0,00	+Y
H22	C2	VTP	060004	1,40	0,00	0,46	-Z
H23	C2	VTP	060003	1,40	0,00	0,46	+X
H24	C2	FUSE	050004	0,00	0,00	0,15	-Z

## A.6. Bilder der Tests und weitere Ergebnisse

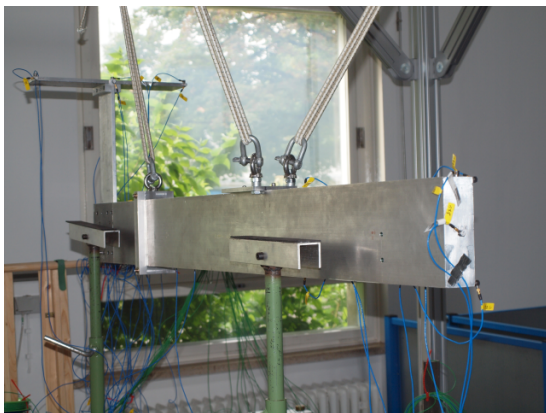
Im Folgenden werden Bilder aller Testaufbauten dargestellt. Darauf folgen unmittelbar Ergebnisse der Tests 2, 3, 6, 7 und 8, die in der Auswertung keinen Platz gefunden haben.



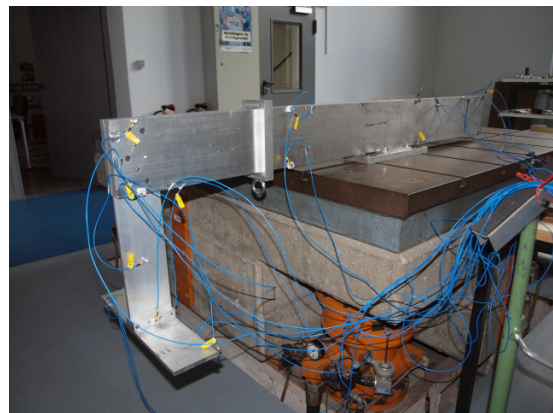
(a) Test T1C0 (Gesamtstruktur frei-frei)



(b) Test T2C1 (Flügel frei-frei)



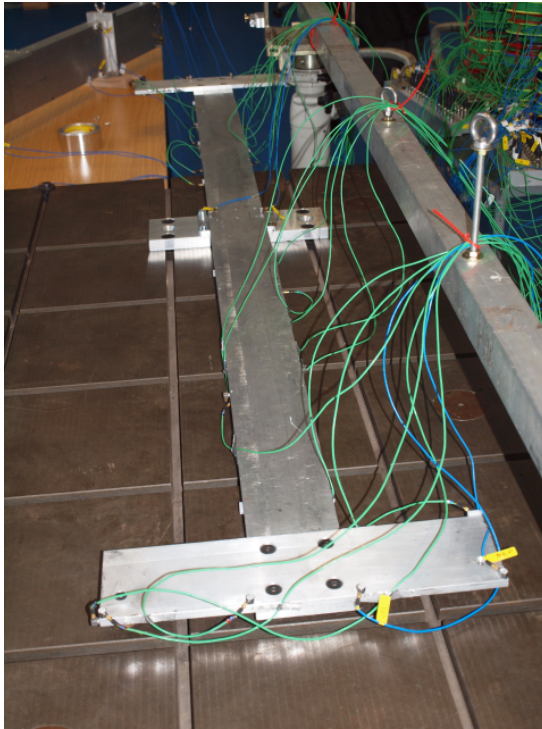
(c) Test T3C2 (Rumpf-Leitwerk frei-frei)



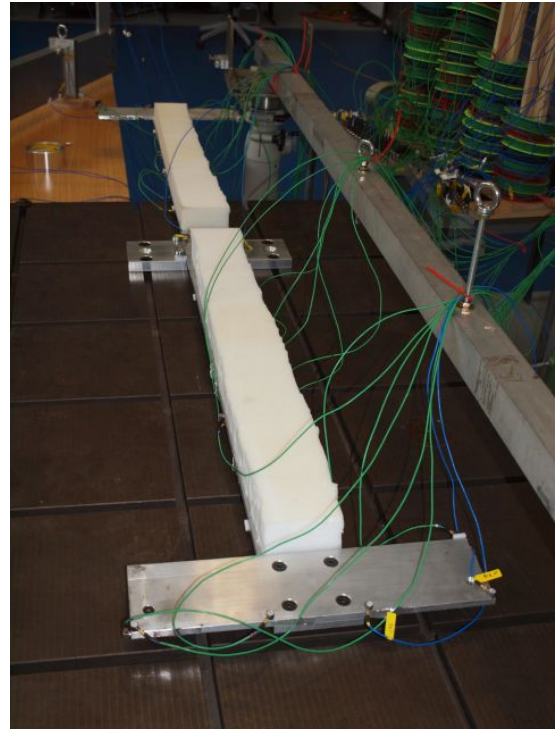
(d) Test T4C2 (Rumpf-Leitwerk eingespannt)

**Abbildung A.5.:** Bilder der Testaufbauten 1 bis 4

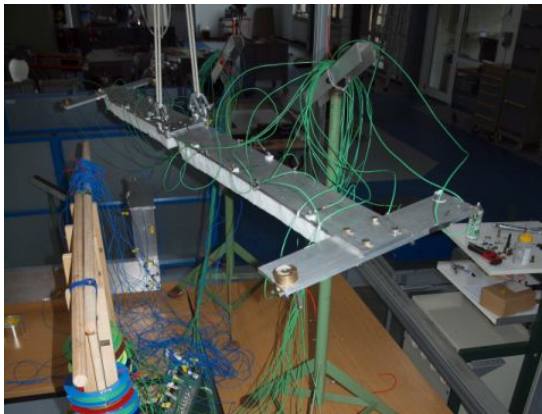




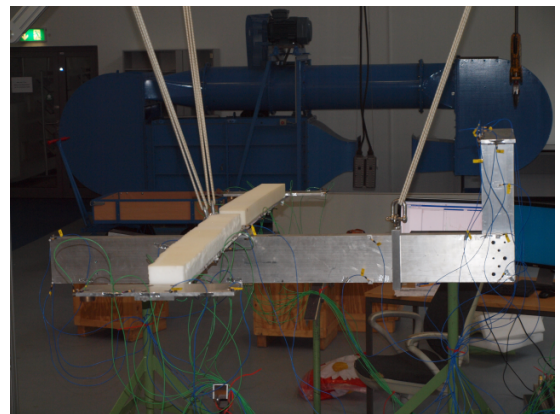
(a) Test T5C1 (Flügel eingespannt)



(b) Test T6C1 (Flügel eingespannt, dämpfungsbehandelt)



(c) Test T7C1 (Flügel frei-frei, dämpfungsbehandelt)



(d) Test T8C0 (Gesamtstruktur frei-frei, dämpfungsbehandelt)

**Abbildung A.6.:** Bilder der Testaufbauten 5 bis 8

## A.7. Weitere Ergebnisse der experimentellen Modalanalyse

Im Folgenden werden die modalen Eigenschaften aller Tests aufgelistet, die keinen Platz in der Dokumentation haben.

Eigenform-Bezeichnung	$f_0$ [Hz]	$D_{gen}$ [%]	MPC [%]	MPD [°]	Phase $a_{gen}$ [°]	$m_{gen}$ [kgm <sup>2</sup> ]
(1) RBM Roll	0,26	4,26	99,56	3,91	-82,73	0,40
(2) RBM Yaw	0,33	5,16	88,11	21,17	-117,87	6,89
(3) RBM Heave	2,03	5,83	99,69	2,57	-81,43	1,74
(4) RBM Pitch	4,05	4,81	99,99	0,60	-85,18	1,30
(5) 2nWingBending-S	8,95	1,75	99,91	2,21	-88,65	4,63
(6) 3nWingBending-A	27,02	0,29	100,00	0,31	-89,91	3,40
(7) WingTorsion-A	33,23	0,26	100,00	0,15	-89,49	1,07
(8) 4nWingBending-S	51,55	1,01	99,96	1,21	-94,73	2,97
(9) WingTorsion-S	70,67	0,31	99,96	1,17	-101,12	13,52
(10) 2nWingForeAftBending-S	93,32	1,00	99,82	2,43	-107,50	6,28
(11) 5nWingBending-A	96,26	0,33	99,82	2,50	-94,43	2,75
(12) 6nWingBending-S	140,53	0,42	100,00	0,36	-88,92	3,34
(13) 7nWingBending-A	202,28	0,70	99,98	0,90	-90,27	3,20
(14) 3nWingForeAftBending-A	241,06	0,21	99,96	1,09	-92,56	6,64
(15) 8nWingBending-S	268,26	0,52	99,99	0,52	-90,76	3,27
(16) WingletBendingLeft-A	315,72	0,45	99,82	2,41	-92,18	1,97
(17) WingletBendingRight-S	324,61	0,38	99,50	4,17	-92,76	2,30
(18) 9nWingBending-A	328,93	0,89	98,76	6,68	-63,63	2,72
(19) WingTorsion-A2	338,60	0,51	99,11	5,44	-58,69	4,62
(20) WingTorsion-S2	347,47	1,18	99,84	2,26	-100,04	2,21
(21) WingTorsion-S3	387,20	0,49	99,46	4,36	-106,27	8,16

**Tabelle A.3.:** Modale Eigenschaften T2C1

Eigenform-Bezeichnung	$f_0$ [Hz]	$D_{gen}$ [%]	MPC [%]	MPD [°]	Phase $a_{gen}$ [°]	$m_{gen}$ [kgm <sup>2</sup> ]
(1) RBM Yaw	0,51	0,59	99,89	1,84	-94,47	12,61
(2) RBM Surge	0,88	6,18	98,92	6,46	-81,34	13,21
(3) RBM Heave	1,17	5,80	98,07	8,29	-89,58	21,14
(4) RBM Sidle	2,22	0,93	99,99	0,67	-91,32	1,39
(5) 2nVTPBending-A	48,12	1,41	99,99	0,65	-100,84	1,42
(6) VTP Torsion-A	67,41	0,23	99,98	0,81	-48,69	0,18
(7) 2nFuselageLateralBending-A	104,84	0,57	99,95	1,28	-84,25	1,33
(8) 3nVTPBending-A	128,15	0,83	99,93	1,58	-93,12	1,03
(9) 2nHTPBending-S	206,80	1,74	99,88	2,00	-84,19	0,73
(10) HTPForeAftBending-S	226,30	0,51	99,58	3,21	-97,81	1,79
(11) 3nFuselageLateralBending-A	299,78	0,53	99,91	1,77	-105,05	7,11
(12) 2nFuselageVerticalBending-S	359,10	0,44	99,90	1,87	-86,30	8,70

Tabelle A.4.: Modale Eigenschaften T3C2

Eigenform-Bezeichnung	$f_0$ [Hz]	$D_{gen}$ [%]	MPC [%]	MPD [°]	Phase $a_{gen}$ [°]	$m_{gen}$ [kgm <sup>2</sup> ]
(1) 2nWingBending-S	5,11	0,37	99,58	3,40	-86,74	1,66
(2) 1nWingBending-A	5,14	0,11	99,85	2,70	-72,22	1,84
(3) WingTorsion-S	33,26	0,18	99,96	1,19	-111,58	0,60
(4) WingTorsion-A	33,29	0,29	99,96	1,42	-92,12	0,54
(5) 4nWingBending-S	42,60	0,34	99,98	0,72	-105,43	2,45
(6) 3nWingBending-A	42,96	0,20	99,98	0,89	-90,54	1,42
(7) 1nWingForeAftBending-A	46,22	0,42	99,96	1,19	-82,09	4,70
(8) 2nWingForeAftBending-S	48,90	0,22	99,99	0,53	-85,46	4,47
(9) 6nWingBending-S	127,63	0,45	99,77	2,69	-90,24	1,62
(10) 5nWingBending-A	128,49	0,26	99,62	3,85	-86,85	1,51
(11) 8nWingBending-S	254,14	1,00	99,76	2,87	-84,99	1,85
(12) 7nWingBending-A	256,04	0,75	99,91	1,70	-89,76	1,67
(13) WingletBendingLeft-U	319,55	0,65	99,11	5,51	-92,87	1,87
(14) WingletBendingRight-U	321,40	0,61	98,24	7,76	-85,56	2,30
(15) 3nWingForeAftBending-A	327,94	0,58	99,86	2,16	-92,73	2,58
(16) 4nWingForeAftBending-S	337,36	0,68	98,20	7,78	-77,71	2,55
(17) WingTorsion-A2	341,19	1,07	99,27	5,11	-81,43	2,32
(18) WingTorsion-S2	345,02	0,96	99,14	5,35	-89,01	2,82

Tabelle A.5.: Modale Eigenschaften T6C1

Eigenform-Bezeichnung	$f_0$ [Hz]	$D_{gen}$ [%]	MPC [%]	MPD [°]	Phase $a_{gen}$ [°]	$m_{gen}$ [kgm <sup>2</sup> ]
(1) RBM Yaw	0,28	4,70	99,88	2,02	-92,76	6,81
(2) RBM Roll	0,30	5,13	97,43	10,08	-69,93	1,49
(3) RBM Heave	1,99	4,82	99,71	3,59	-65,46	2,05
(4) RBM Pitch	3,38	6,74	99,96	1,20	-89,06	1,43
(5) 2nWingBending-S	8,62	2,13	99,95	2,01	-89,51	3,85
(6) 3nWingBending-A	26,25	0,31	100,00	0,20	-89,60	3,64
(7) WingTorsion-A	33,11	0,36	100,00	0,19	-89,36	1,06
(8) 4nWingBending-S	50,26	0,94	99,98	1,02	-92,01	3,24
(9) WingTorsion-S	70,63	0,40	99,98	0,72	-86,09	9,20
(10) 2nWingForeAftBending-S	89,64	1,46	99,54	4,03	-97,06	8,32
(11) 5nWingBending-A	93,18	0,28	99,80	2,69	-94,54	3,29
(12) 6nWingBending-S	135,72	0,48	100,00	0,32	-90,61	3,70
(13) 7nWingBending-A	193,03	1,12	99,96	1,25	-94,77	3,74
(14) 3nWingForeAftBending-A	242,00	0,56	99,91	1,72	-89,60	7,04
(15) 8nWingBending-S	259,98	1,12	99,92	1,64	-95,02	4,03
(16) 9nWingBending-A	303,18	1,34	99,51	4,39	-93,30	3,38
(17) WingletBendingLeft-A	319,56	0,94	98,70	6,58	-90,35	3,24
(18) WingletBendingRight-S	323,18	0,70	95,62	13,07	-87,94	2,90
(19) WingTorsion-A2	336,11	0,89	99,47	4,19	-113,83	1,45
(20) WingTorsion-S2	341,88	0,92	99,56	3,81	-70,88	3,21
(21) WingTorsion-S3	388,88	1,07	97,75	9,17	-89,41	20,87

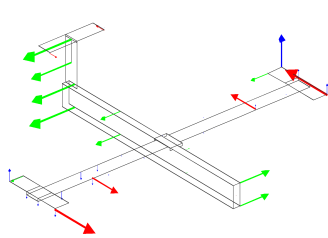
Tabelle A.6.: Modale Eigenschaften T7C1



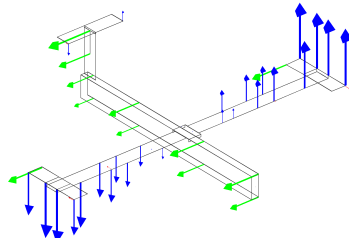
Eigenform-Bezeichnung	$f_0$ [Hz]	$D_{gen}$ [%]	MPC [%]	MPD [°]	Phase $a_{gen}$ [°]	$m_{gen}$ [kgm <sup>2</sup> ]
(1) RBM Yaw	0,41	0,72	99,86	2,39	-94,54	13,44
(2) RBM Sidle	0,67	1,14	99,87	1,95	-97,84	3,64
(3) RBM Surge	0,85	4,01	94,87	21,63	-109,93	9,01
(4) RBM Heave	0,91	6,19	97,14	9,15	-81,12	19,92
(5) 2nWingBending-S	5,50	0,51	100,00	0,28	-87,26	4,44
(6) 3nWingBending-A	15,08	0,28	99,99	0,70	-87,39	4,57
(7) WingTorsion-A	32,59	0,30	99,95	1,26	-89,87	1,07
(8) WingTorsion-S	33,01	0,36	99,86	2,12	-85,10	1,09
(9) VTPBending-A	34,46	0,54	99,98	0,77	-94,34	2,23
(10) 4nWingBending-S	43,39	0,61	99,99	0,52	-87,08	2,78
(11) 1nWingForeAftBending-A	47,25	0,37	99,99	0,58	-86,17	7,82
(12) 2nWingForeAftBending-S	52,05	0,22	99,98	0,74	-89,76	4,26
(13) 5nWingBending-A	58,50	0,65	99,99	0,70	-84,43	3,67
(14) VTPTorsion-A	67,80	0,30	99,99	0,56	-93,63	0,83
(15) 2nFuselageLateralBending-A	100,46	0,80	99,95	1,33	-86,44	1,14
(16) 2nVTPBending-A	123,47	0,64	99,97	1,11	-91,73	2,18
(17) 6nWingBending-S	127,46	0,41	100,00	0,24	-88,29	2,99
(18) 7nWingBending-A	139,59	0,69	100,00	1,36	-94,74	2,92
(19) 2nHTPBending-S	208,29	1,49	99,77	2,82	-82,72	0,45
(20) HTPForeAftBending-S	226,57	0,34	99,71	2,94	-98,24	1,99
(21) WingBendingRight-U	252,86	0,96	95,63	12,61	-79,37	5,51
(22) WingBendingLeft-U	253,48	1,32	95,18	15,22	-89,56	2,02
(23) 3nWingForeAftBending-A	276,37	0,41	99,70	3,21	-91,88	8,15
(24) 3nFuselageLateralBending-A	316,44	0,43	98,74	6,46	-82,01	23,56
(25) WingletBendingRight-U	319,62	0,92	99,60	3,77	-88,47	1,88
(26) WingletBendingLeft-U	323,33	0,80	99,84	2,28	-80,57	1,61
(27) WingTorsion-S2	337,05	1,04	98,07	9,47	-78,66	1,33
(28) WingTorsion-A2	338,64	1,13	96,87	10,49	-83,28	1,41
(29) 4nWingForeAftBending-S	344,18	0,52	98,99	6,13	-102,33	2,88
(30) 2nFuselageVerticalBending	355,92	0,58	99,11	5,66	-85,44	10,28

Tabelle A.7.: Modale Eigenschaften T8C0

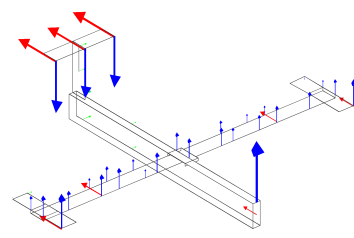
## A.8. Identifizierte Eigenformen der experimentellen Modalanalyse – Gesamtstruktur



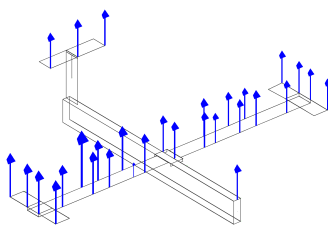
**(a)** (1) RBM Yaw, 0,42Hz



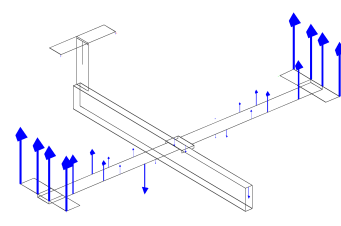
**(b)** (2) RBM Side, 0,70Hz



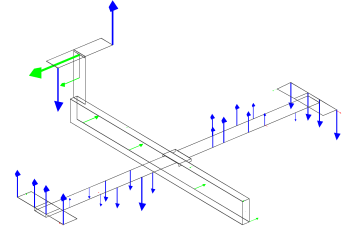
**(c)** (3) RBM Surge, 0,87Hz



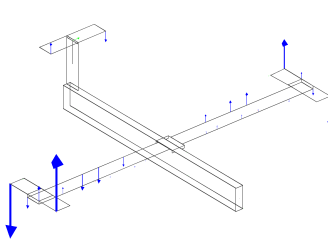
**(d)** (4) RBM Heave, 0,98Hz



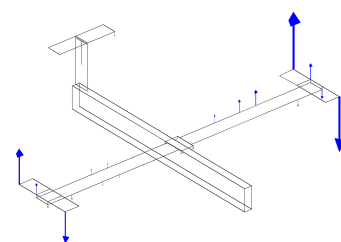
**(e)** (5) 2nWingBending-S, 5,52Hz



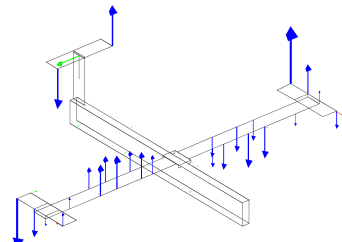
**(f)** (6) 3nWingBending-A, 15,15Hz



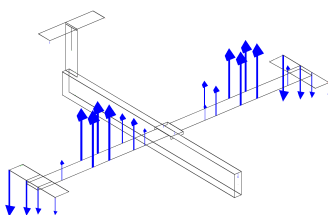
**(g)** (7) WingTorsion-A, 32,73Hz



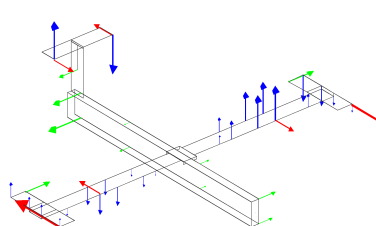
**(h)** (8) WingTorsion-S, 33,09Hz



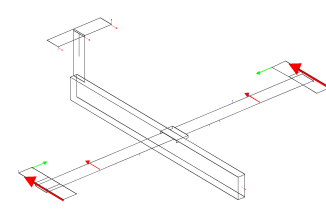
**(i)** (9) VTPBending-A, 34,99Hz



**(j)** (10) 44,56Hz

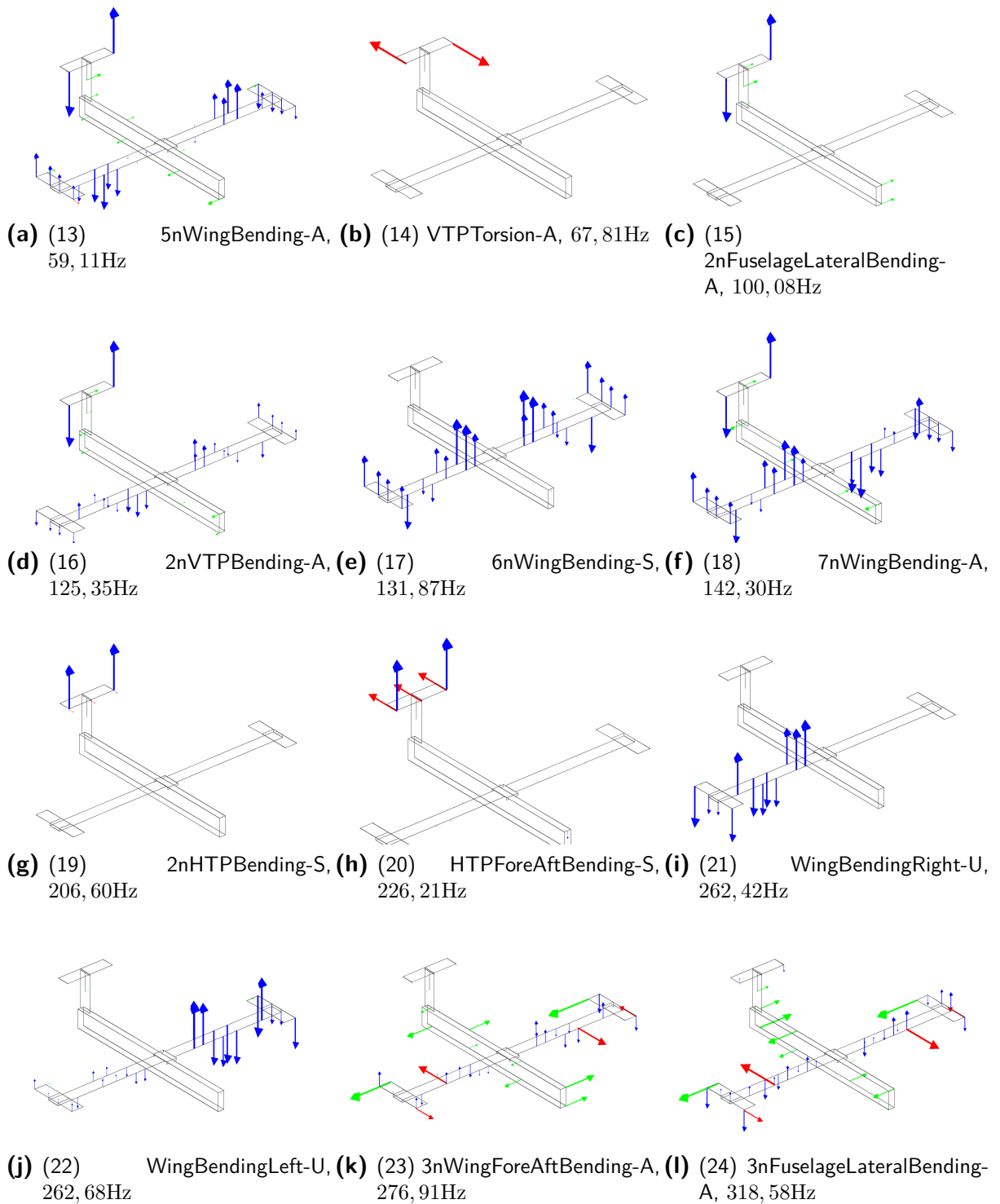


**(k)** (11) 1nWingForeAftBending-A, 47,70Hz

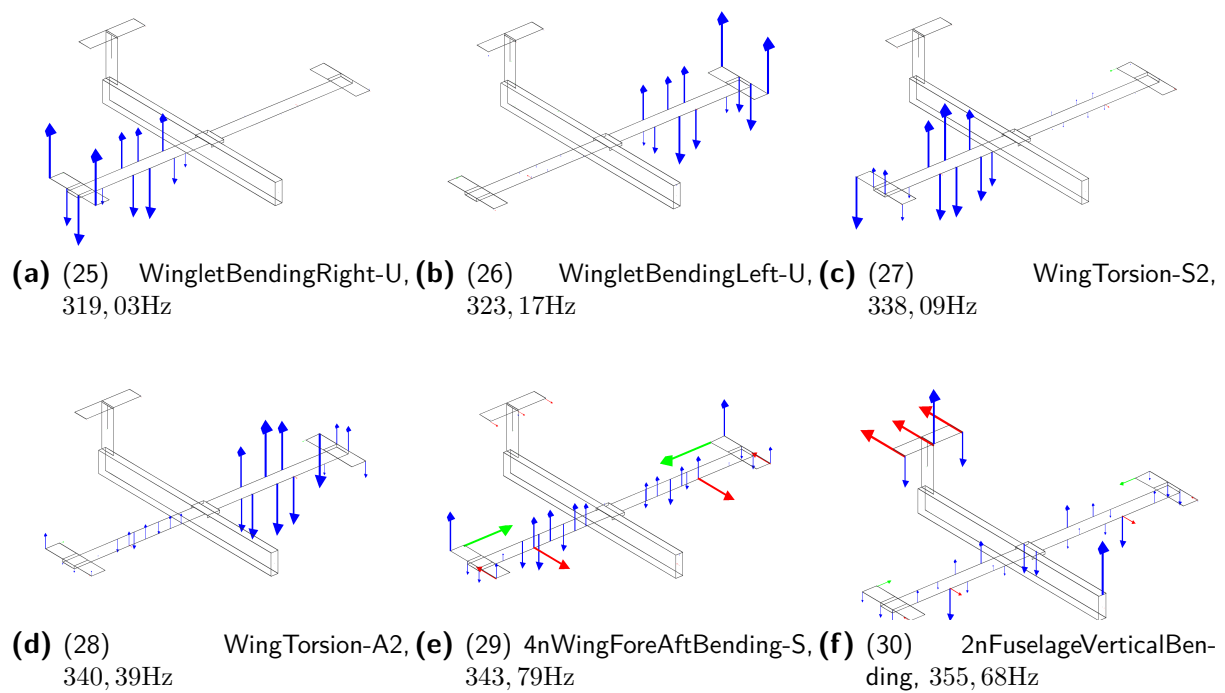


**(l)** (12) 2nWingForeAftBending-S, 52,35Hz

**Abbildung A.7.:** Identifizierte Eigenformen aus T1C0, Eigenfrequenzen zwischen 0,42 und 55 Hz



**Abbildung A.8.:** Identifizierte Eigenformen aus T1C0, Eigenfrequenzen zwischen 55 und 319 Hz



**Abbildung A.9.:** Identifizierte Eigenformen aus T1C0, Eigenfrequenzen zwischen 319 und 400 Hz

## A.9. Identifizierte Eigenformen aus EMA der Rumpf-Leitwerk-Substruktur

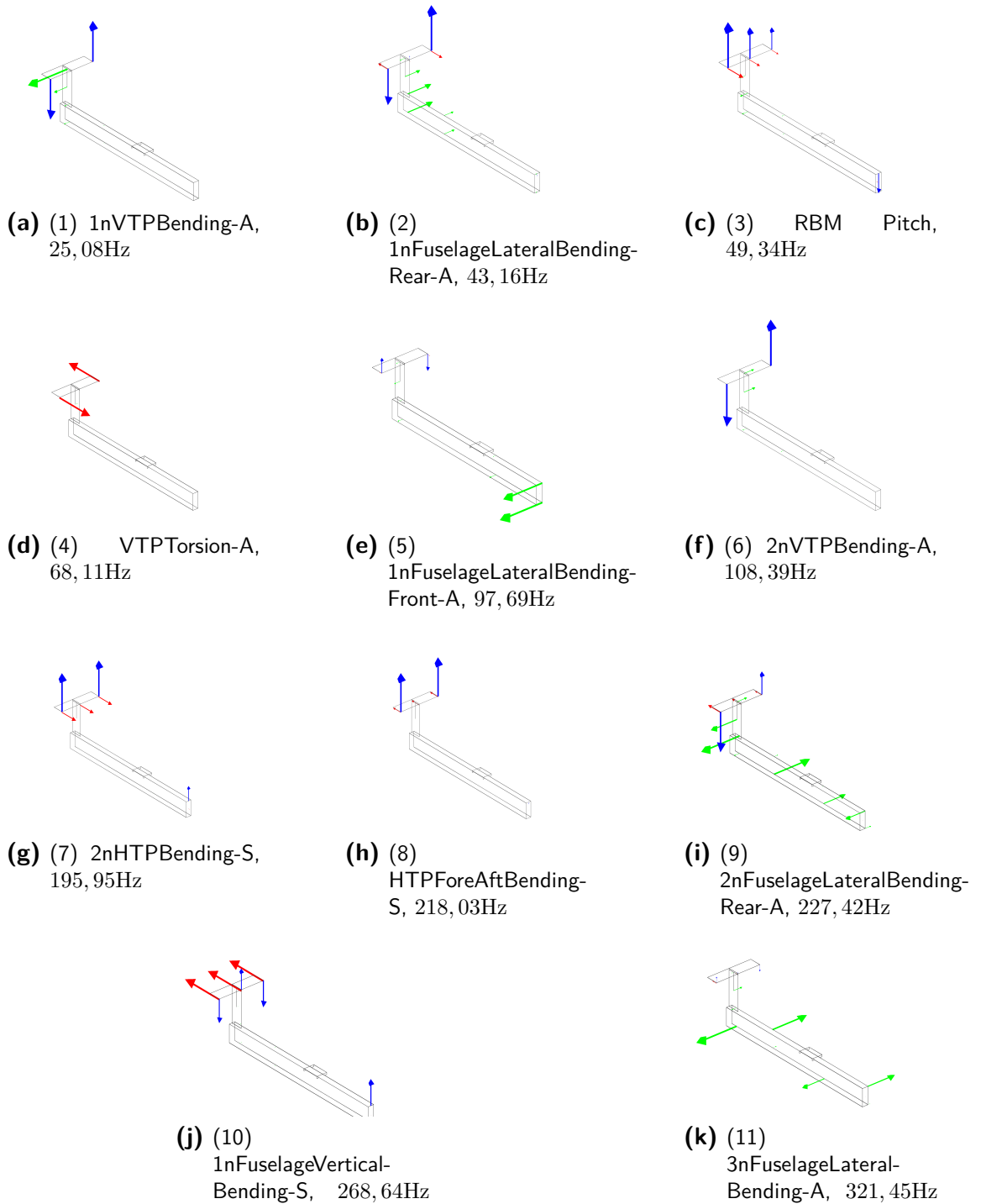
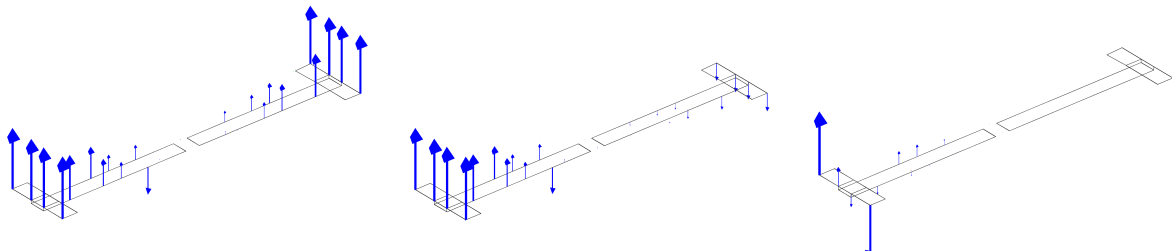
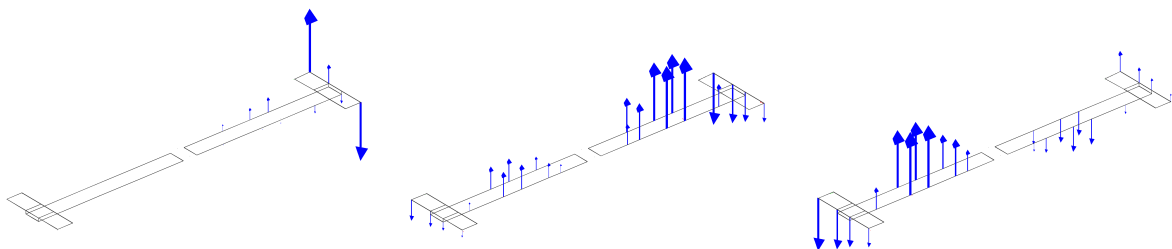


Abbildung A.10.: Identifizierte Eigenformen aus T4C2

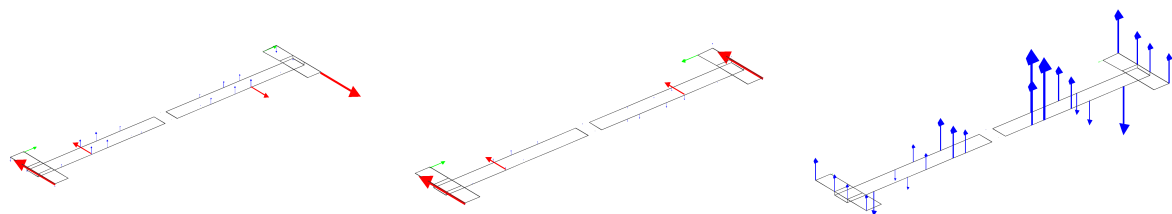
## A.10. Identifizierte Eigenformen aus EMA der Flügel-Substruktur



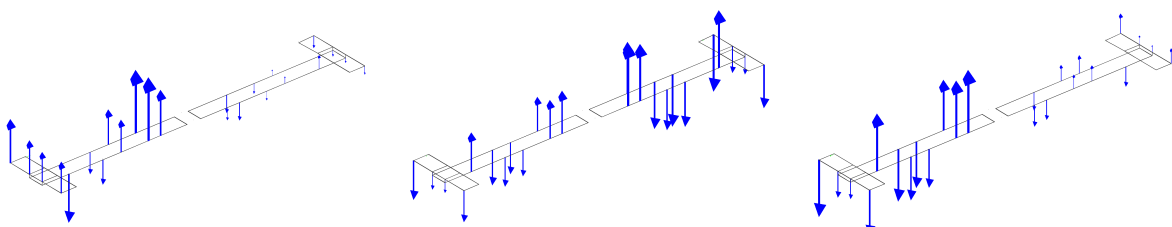
**(a)** (1) 2nWingBending-S, 5, 15Hz **(b)** (2) 1nWingBending-A, 5, 18Hz **(c)** (3) WingTorsion-A, 33, 33Hz



**(d)** (4) WingTorsion-S, 33, 40Hz **(e)** (5) 4nWingBending-S, 43, 93Hz **(f)** (6) 3nWingBending-A, 44, 14Hz

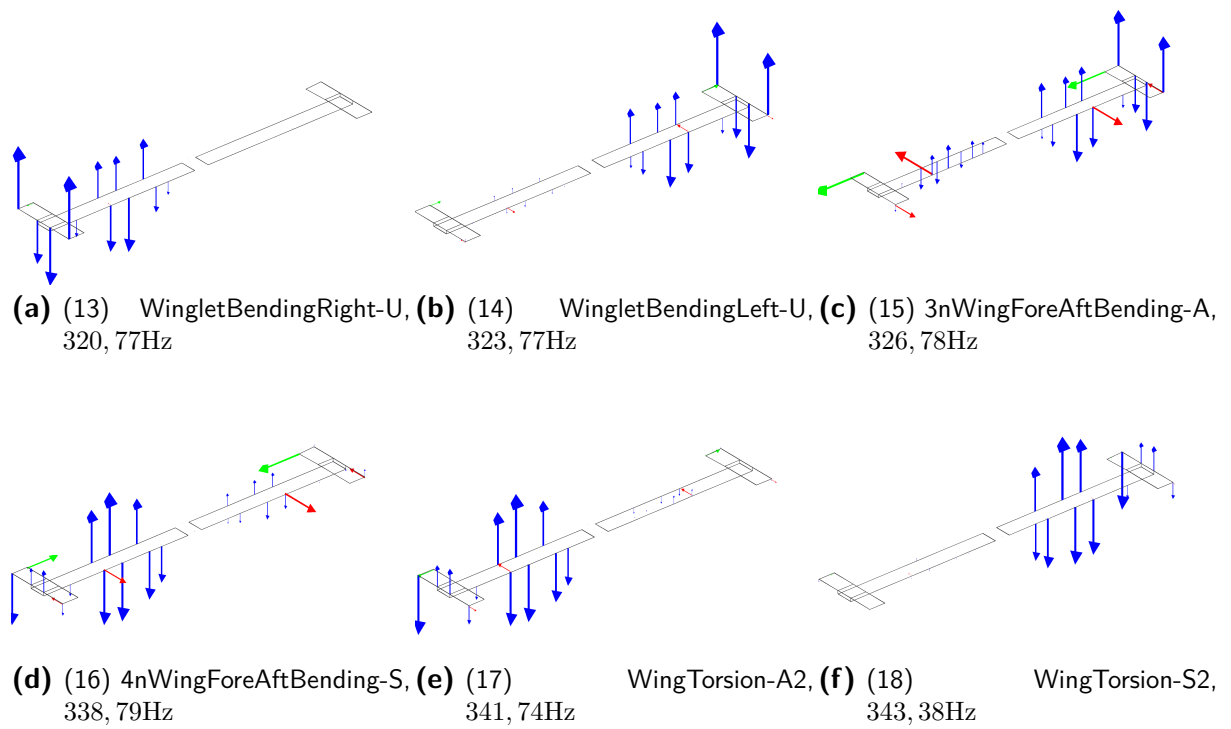


**(g)** (7) 1nWingForeAftBending-A, 46, 83Hz **(h)** (8) 2nWingForeAftBending-S, 49, 30Hz **(i)** (9) 6nWingBending-S, 132, 25Hz



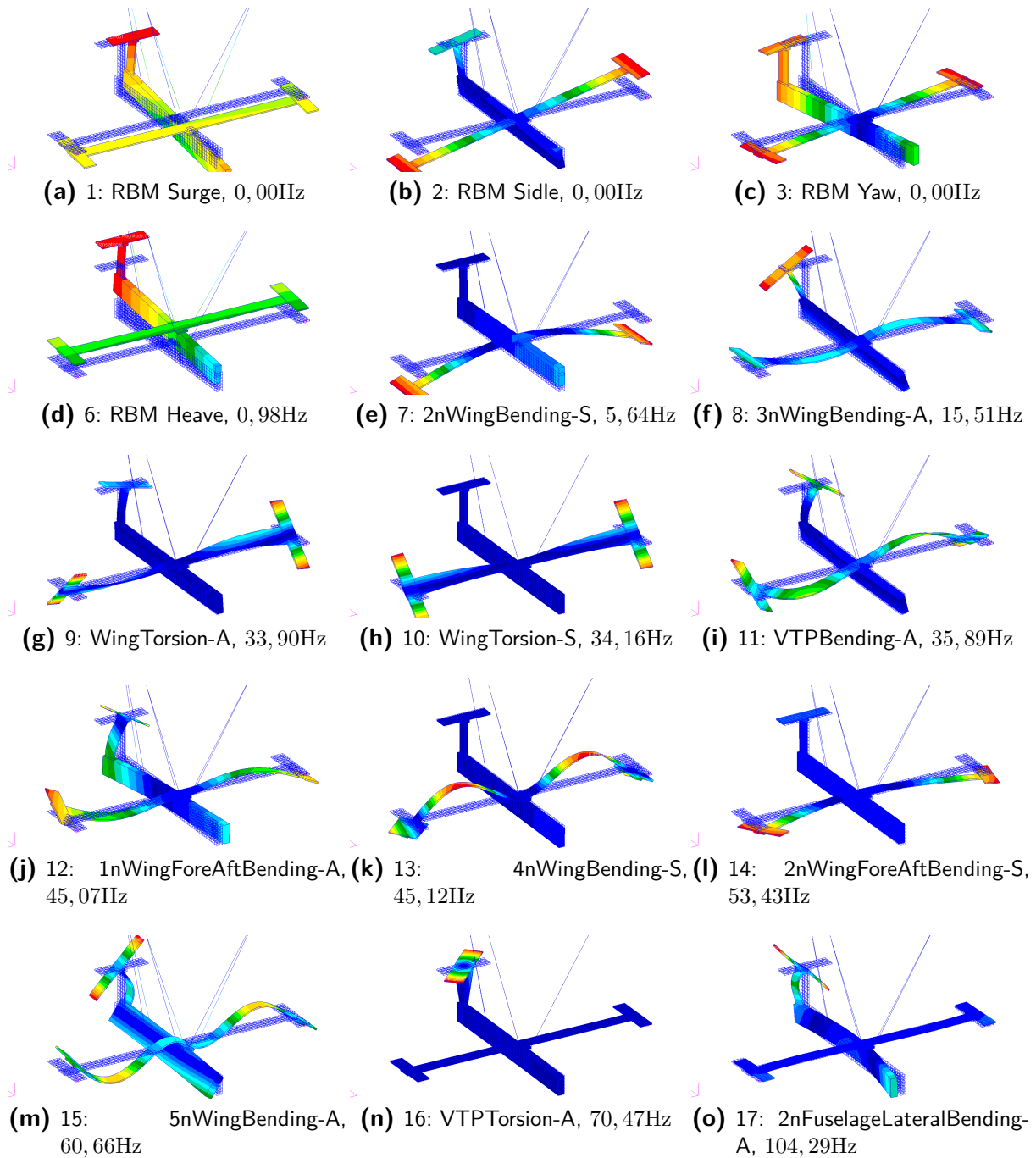
**(j)** (10) 5nWingBending-A, 132, 85Hz **(k)** (11) 8nWingBending-S, 263, 37Hz **(l)** (12) 7nWingBending-A, 264, 41Hz

**Abbildung A.11.:** Identifizierte Eigenformen aus T5C1, Eigenfrequenzen zwischen 0,5 und 300 Hz



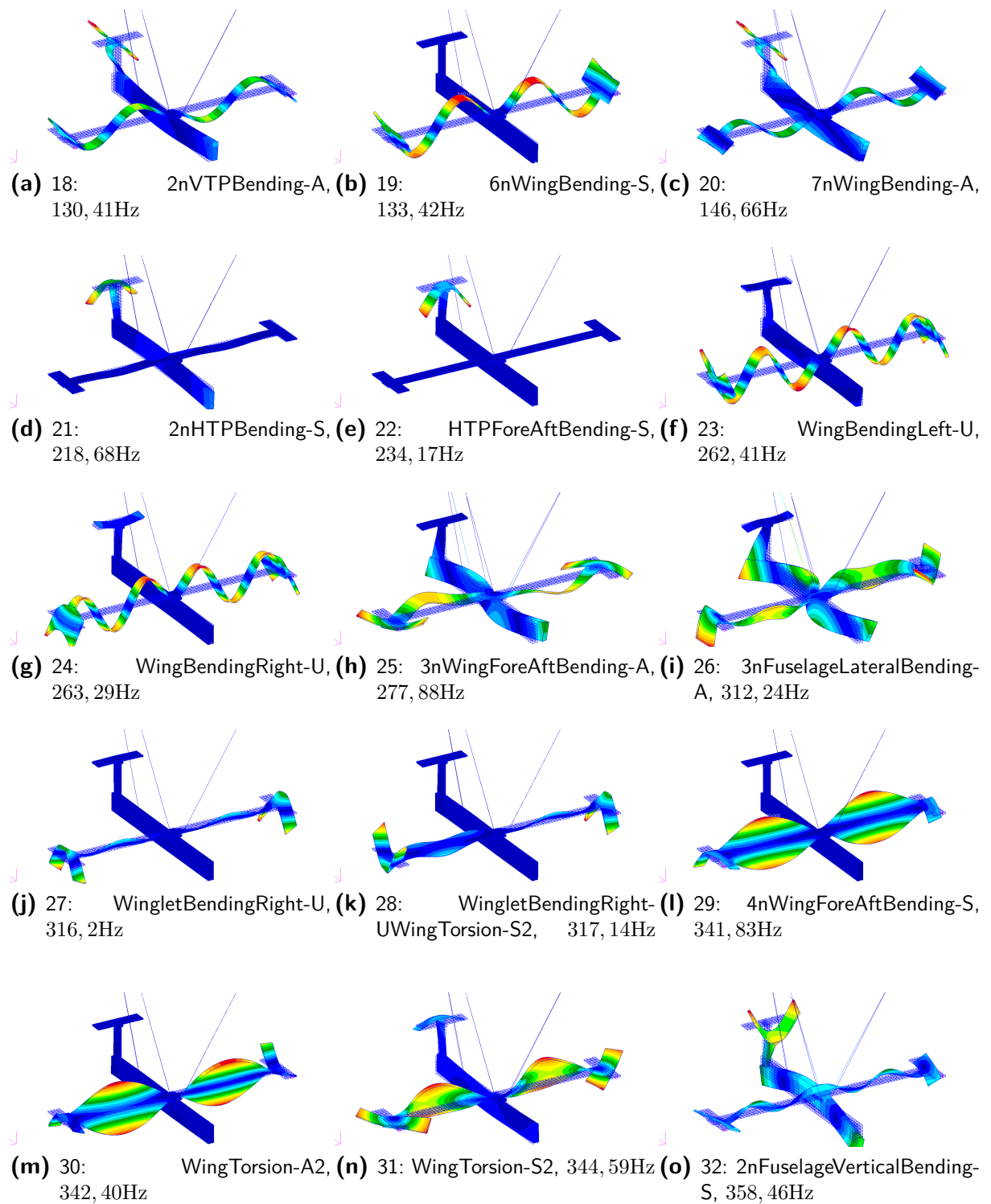
**Abbildung A.12.:** Identifizierte Eigenformen aus T5C1, Eigenfrequenzen zwischen 300 und 400 Hz

## A.11. Relevante Eigenformen des manuell angepassten FE-Modells der Laborstruktur



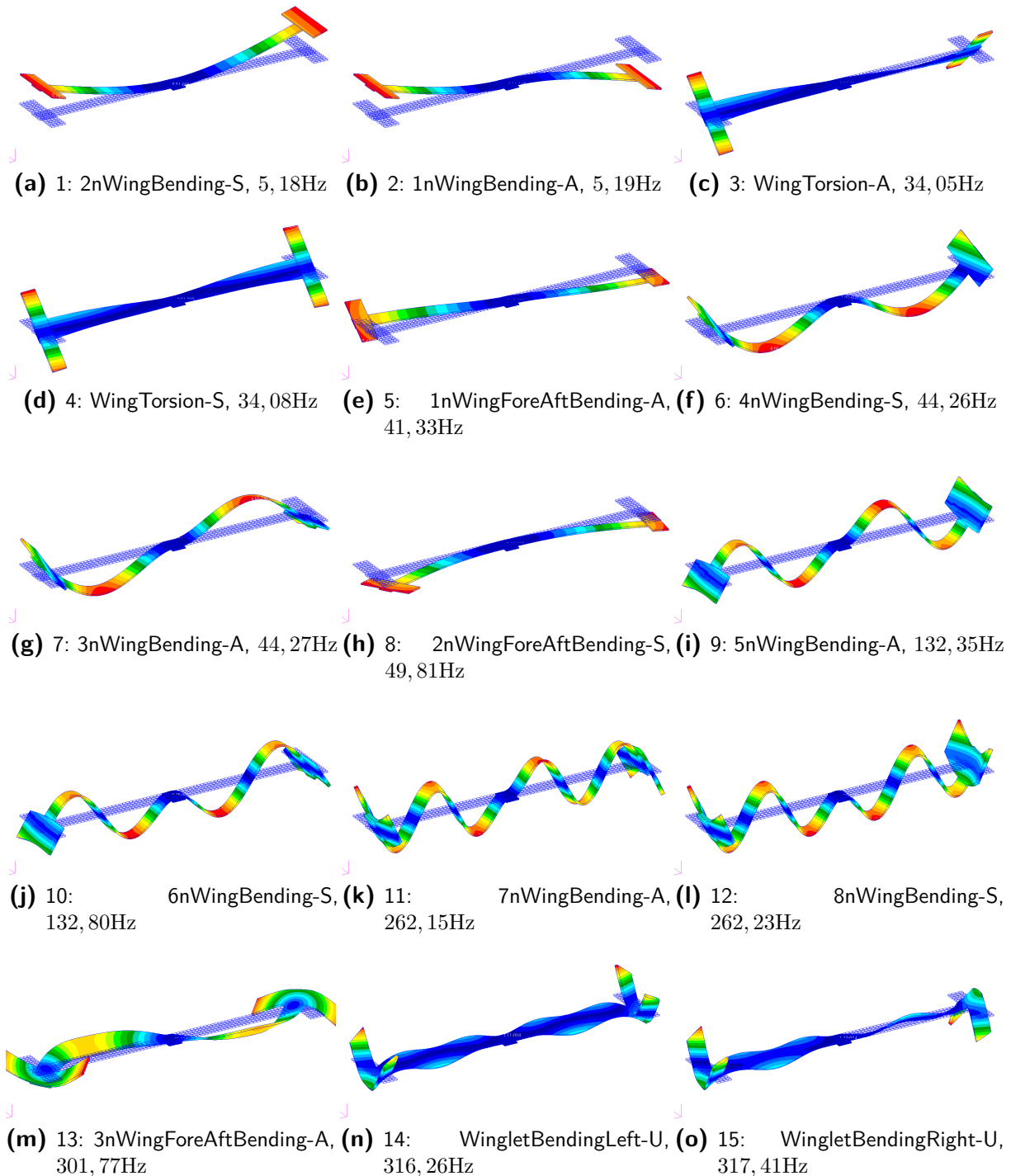
**Abbildung A.13.:** Eigenformen des manuell angepassten FE-Modells, Eigenfrequenzen zwischen 0 und 110 Hz



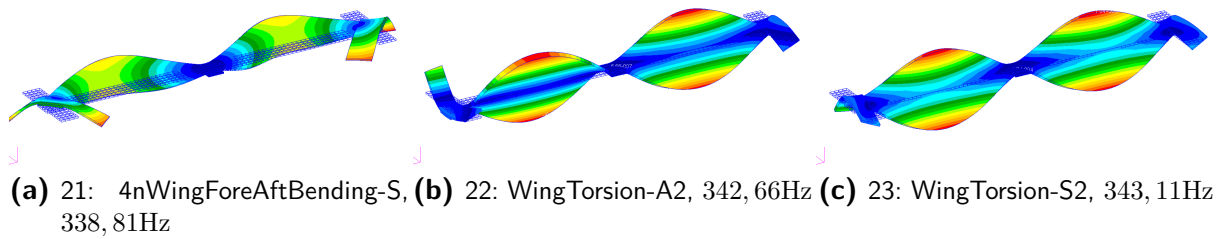


**Abbildung A.14.:** Eigenformen des manuell angepassten FE-Modells, Eigenfrequenzen zwischen 110 und 400 Hz

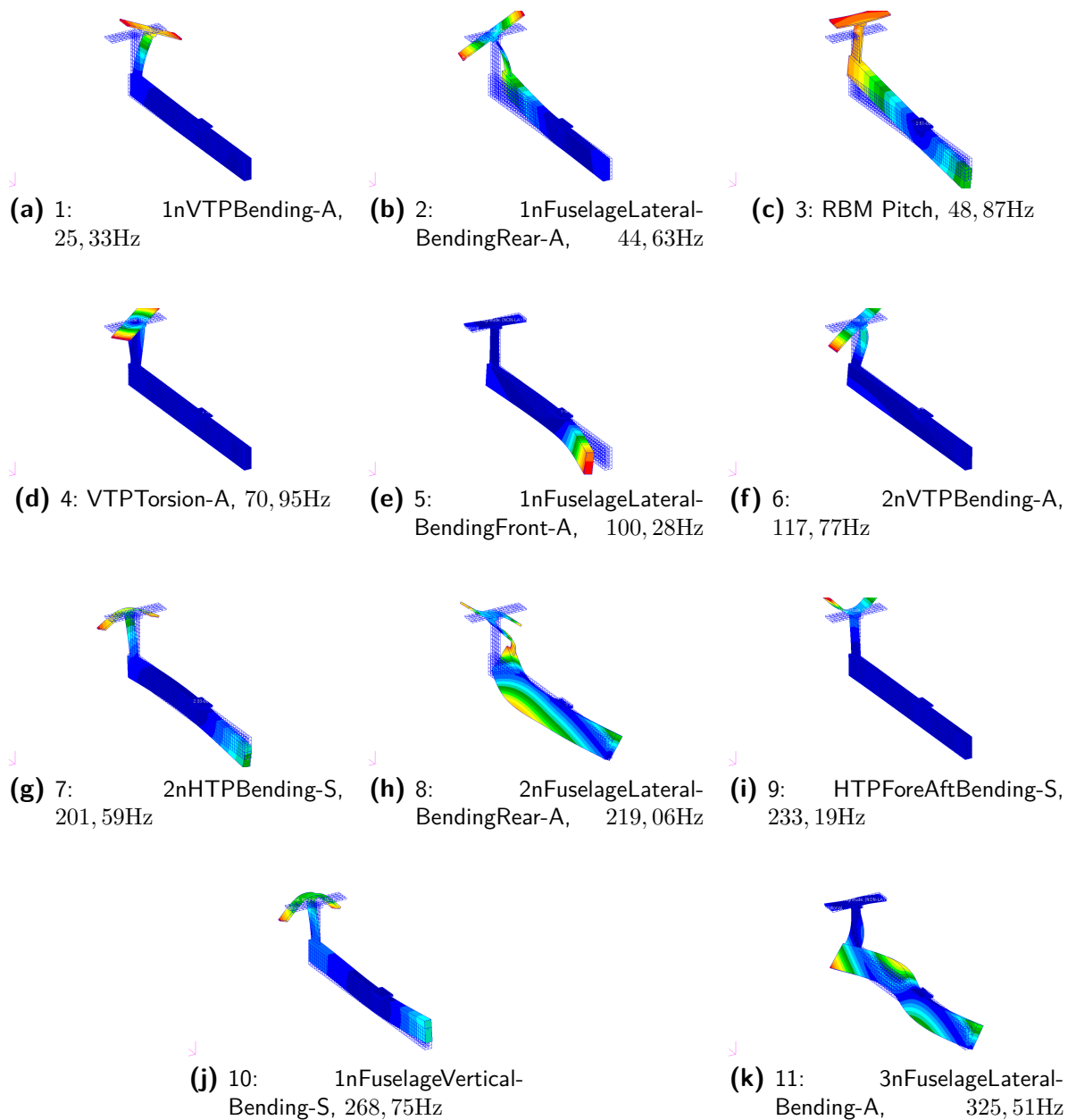
## A.12. Relevante Eigenformen des manuell angepassten FE-Modells der unbehandelten Substrukturen



**Abbildung A.15.:** Eigenformen des manuell angepassten FE-Modells der Flügel-Substruktur, Eigenfrequenzen zwischen 0 und 320 Hz

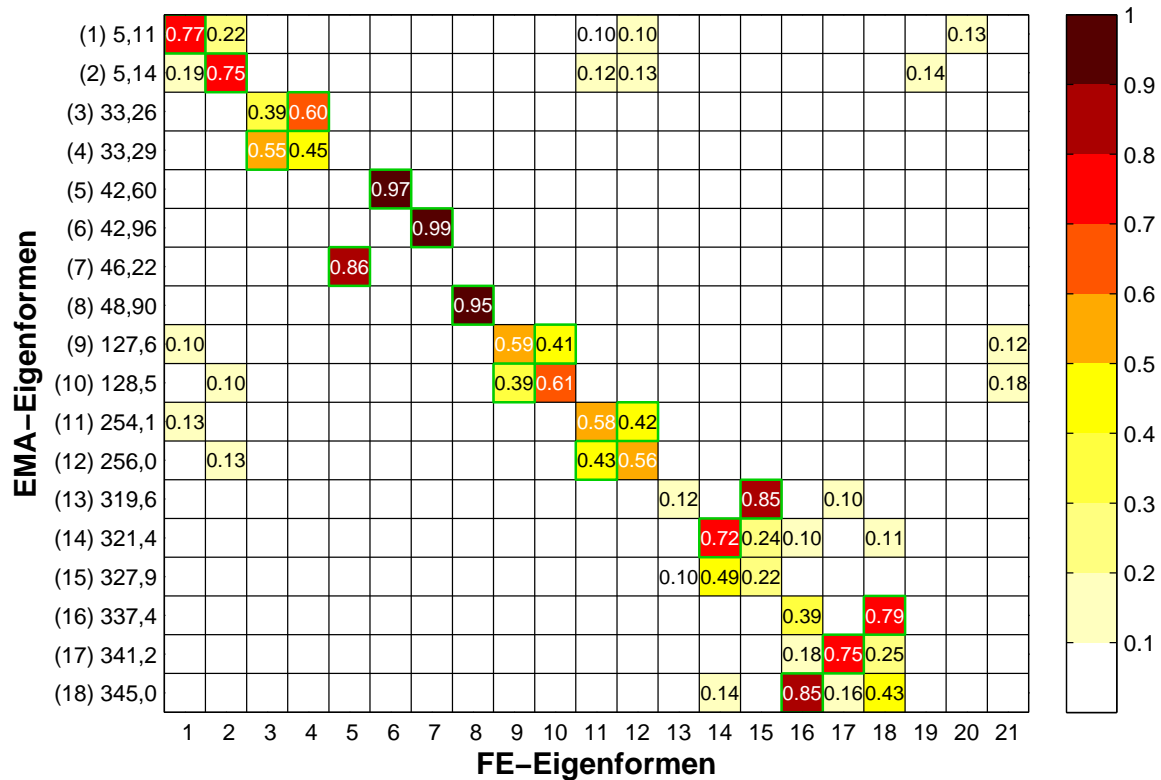


**Abbildung A.16.:** Eigenformen des angepassten FE-Modells, Eigenfrequenzen 320 bis 400 Hz

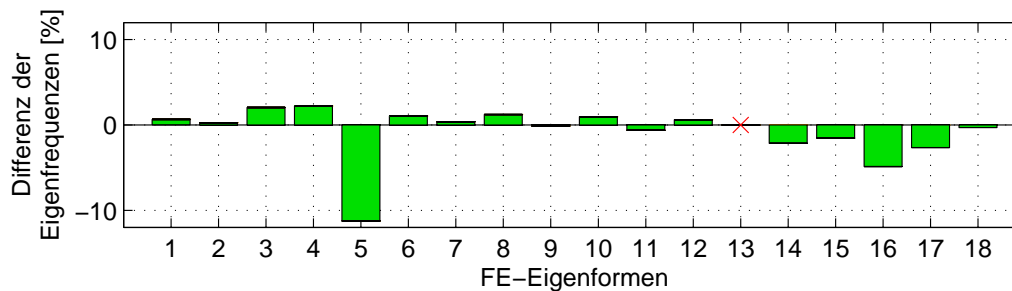


**Abbildung A.17.:** Eigenformen des angepassten FE-Modells der Rumpf-Leitwerk-Substruktur

## A.13. Weitere Ergebnisse der Korrelation

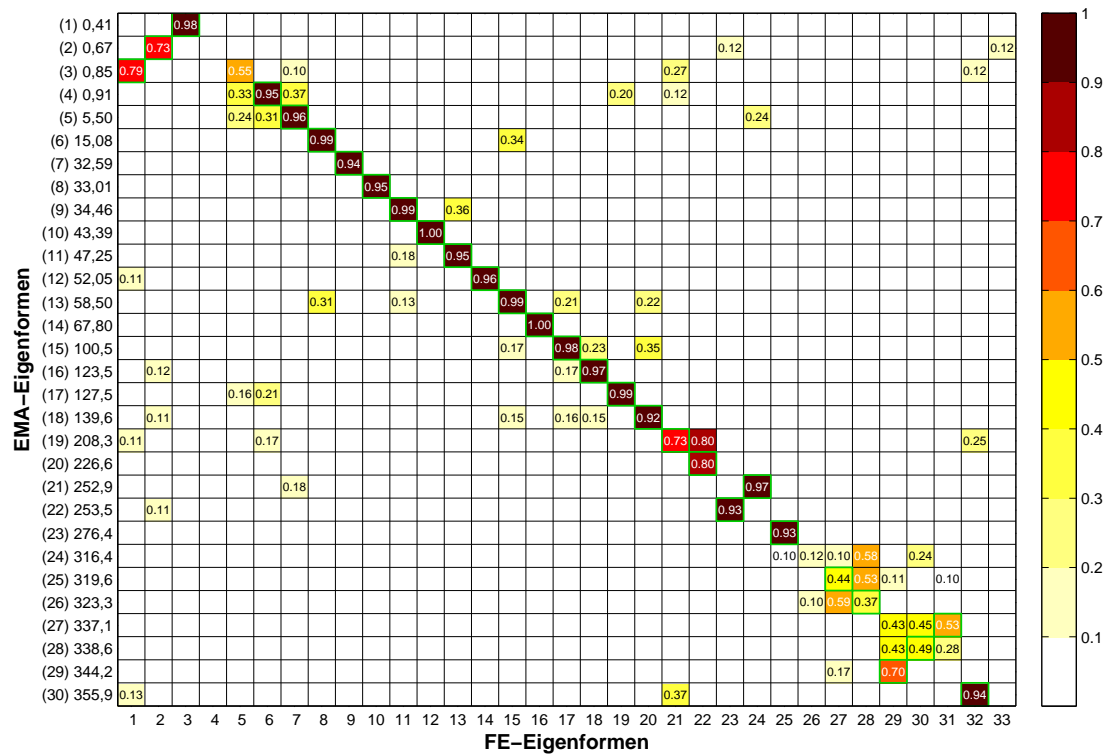


(a) MAC-Matrix zwischen experimentell und numerisch bestimmten Eigenformen

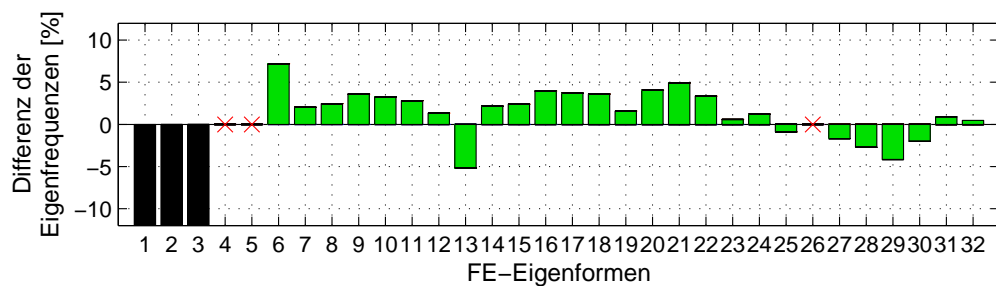


(b) Frequenzabweichung der numerisch gegenüber den experimentell bestimmten Eigenfrequenzen

**Abbildung A.18.:** MAC-Matrix, ausgewählte Eigenformpaare und Frequenzabweichung bei eingespannter, dämpfungsbeschichteter Flügel-Substruktur T6C1



(a) MAC-Matrix zwischen experimentell und numerisch bestimmten Eigenformen



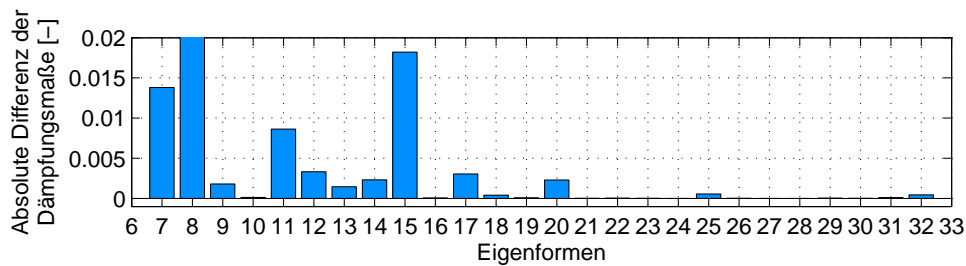
(b) Frequenzabweichung der numerisch gegenüber den experimentell bestimmten Eigenfrequenzen

**Abbildung A.19.:** MAC-Matrix, ausgewählte Eigenformpaare und Frequenzabweichung bei eingespannter, dämpfungsbeschichteter Gesamtstruktur T8C0

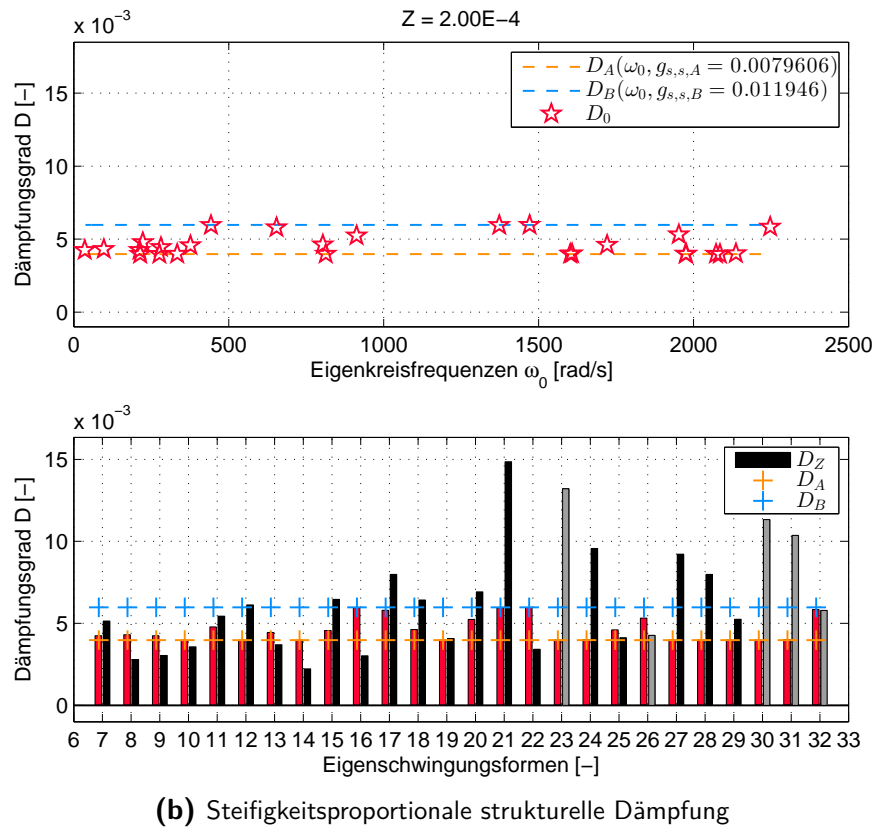
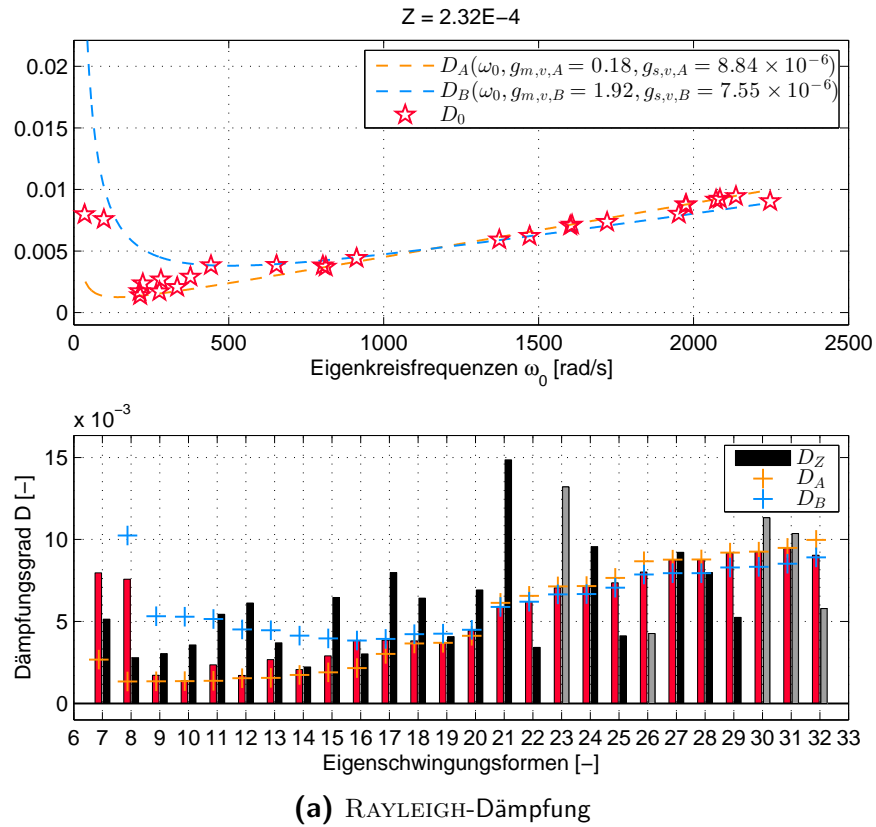
## A.14. Ergebnisse der Dämpfungskopplung bei der dämpfungsbehandelten Laborstruktur AIRMOD

Dämpfungsmodell	Abschnitt			
	Flügel (A)	Rumpf (B)	Feder-Elemente (F)	Bungee-Seile (S)
RAYLEIGH-Dämpfung	$g_{m,v,A} = 0,18$ $g_{s,v,A} = 8,84 \cdot 10^{-6}$	$g_{m,v,B} = 1,92$ $g_{s,v,B} = 7,55 \cdot 10^{-6}$	$g_{s,v,Fxy} = 0$ $g_{s,v,Fz} = 0$	$g_{s,v,S} = 2,1 \cdot 10^{-2}$
Strukturelle Dämpfung	$g_{s,s,A} = 0,008$	$g_{s,s,A} = 0,012$	$g_{s,s,Fxy} = 0$ $g_{s,s,Fz} = 0$	$g_{s,s,S} = 0,1238$
Modale Dämpfung	mit $D_{gen}$	mit $D_{gen}$	nicht möglich	nicht möglich

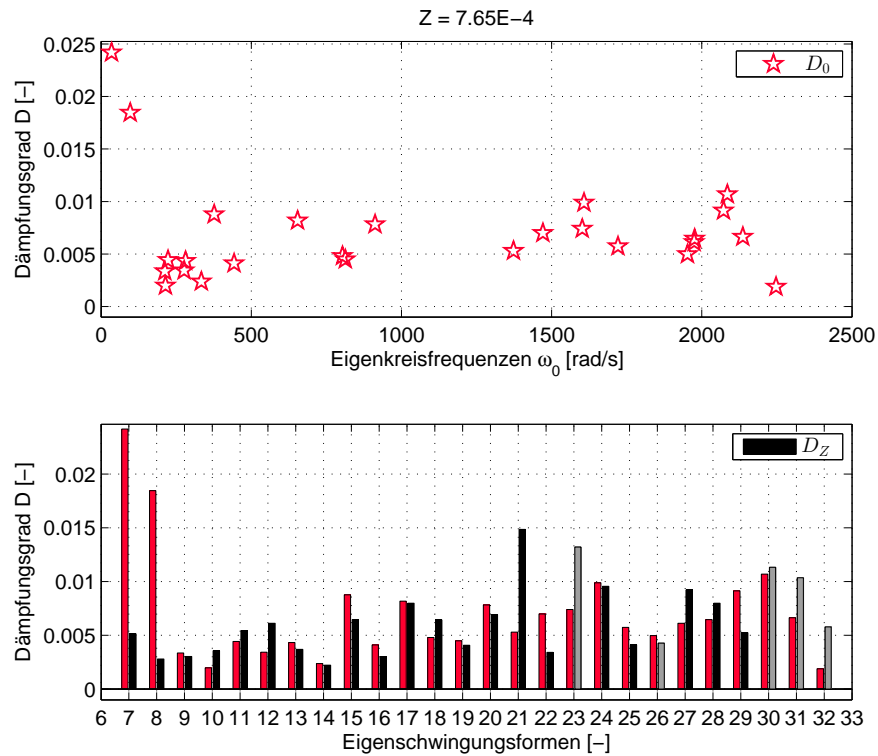
**Tabelle A.8.:** Verlustfaktoren  $g$  der dämpfungsbehandelten Komponenten



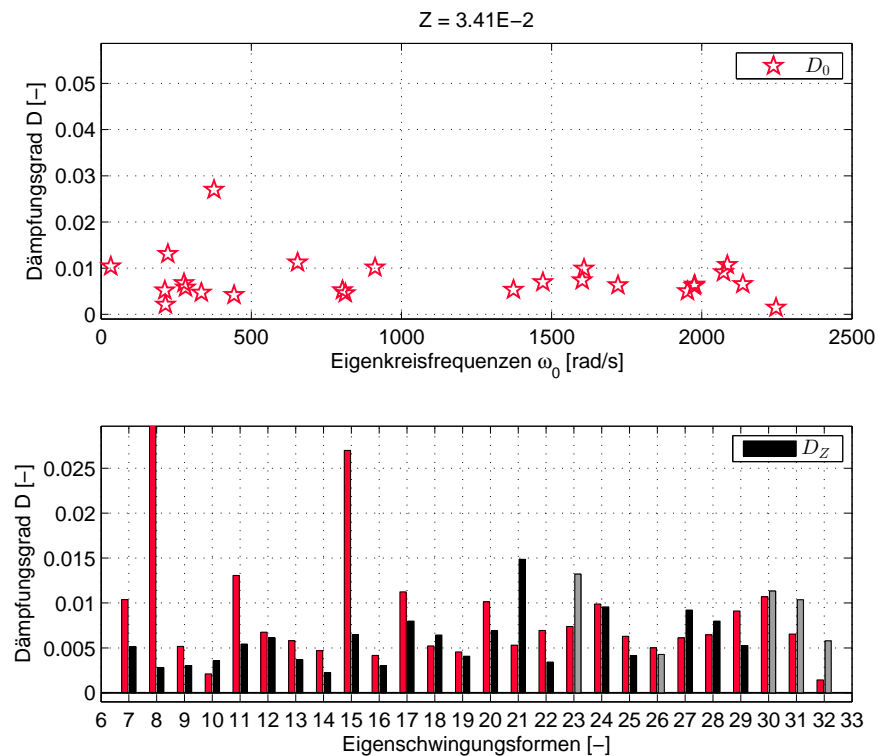
**Abbildung A.20.:** Unterschied zwischen berechneten globalen modalen Dämpfungsmaßen der modalen Dämpfungsmodellierungen bei der beschichteten Gesamtstruktur



**Abbildung A.21.:** Ergebnisse der Kopplung der proportionalen gedämpften Substrukturen mit abgeschätzten Verlustfaktoren  $g$



(a) Modale viskose Dämpfung

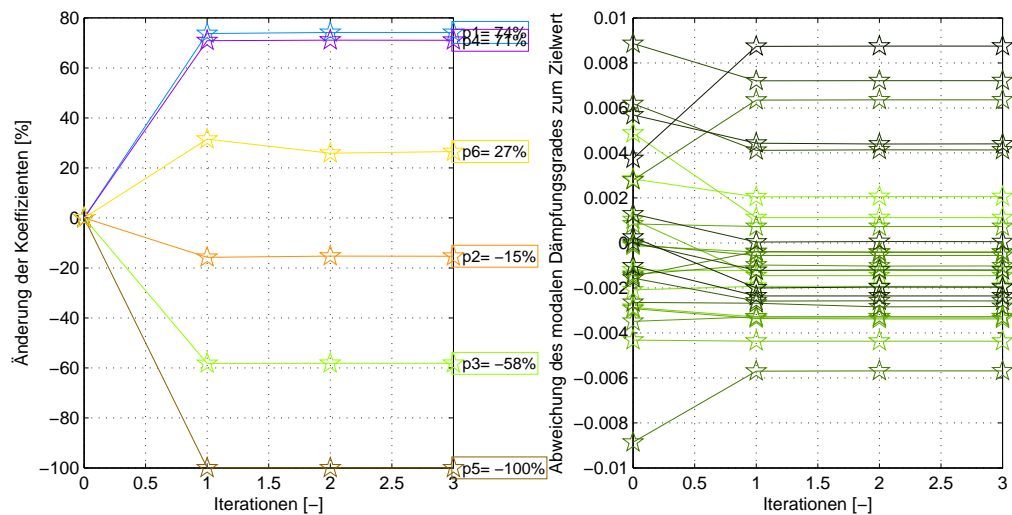
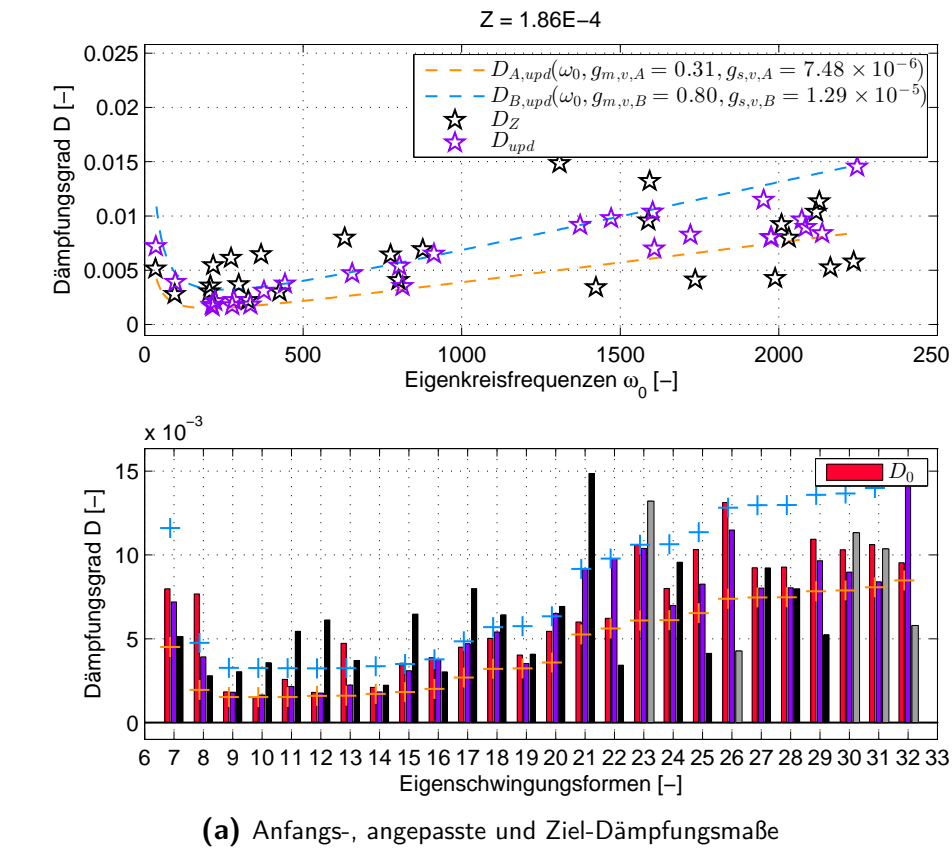


(b) Modale strukturelle Dämpfung

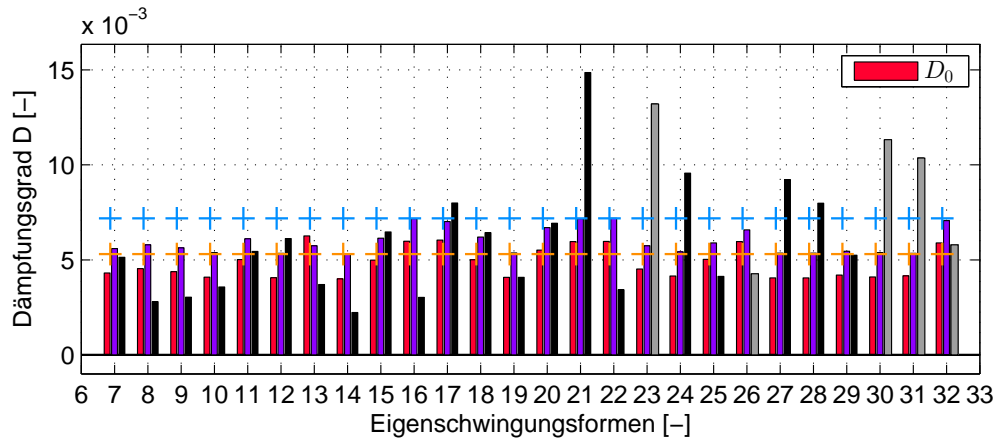
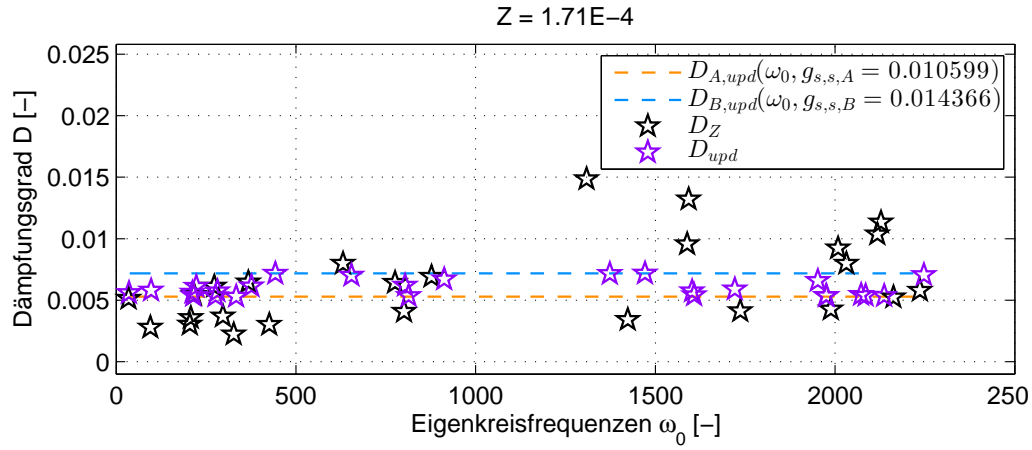
**Abbildung A.22.:** Ergebnisse der Kopplung der proportionalen gedämpften Substrukturen mit abgeschätzten Verlustfaktoren  $g$



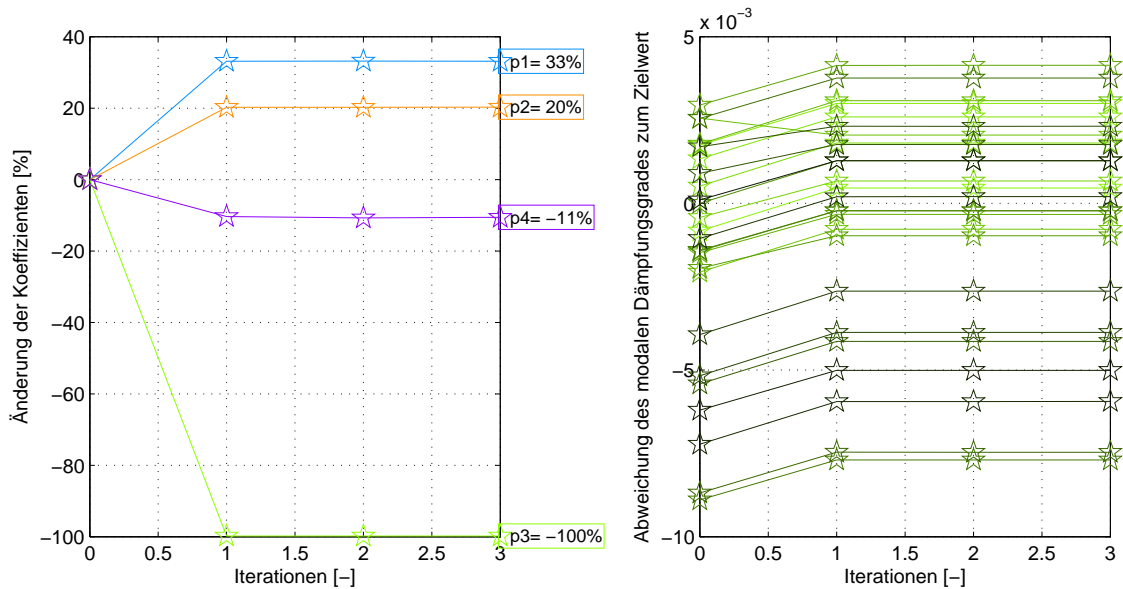
## A.15. Weitere Ergebnisse der computergestützten Modellanpassung



**Abbildung A.23.:** Ergebnisse der computergestützten Modellanpassung bei RAYLEIGH-Dämpfung, dämpfungsbeschichtete Laborstruktur



(a) Anfangs-, angepasste und Ziel-Dämpfungsmaße



(b) Iterative Änderung der Verlustfaktoren und der globalen modalen Dämpfungsgrade

**Abbildung A.24.:** Ergebnisse der computergestützten Modelladaptation bei steifigkeitsproportionaler struktureller Dämpfung, dämpfungsbeschichtete Laborstruktur